

# INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER  
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK  
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER  
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL



XXVII. BAND

ZWEITES HEFT

1959

---

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 27. April 1959

Postverlagsort Berlin

Preis DM 10,60



Das

# INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A

Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. K. Magnus, Stuttgart O, Hackländerstraße 33

Professor Dr. E. Mettler, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. K. v. Sanden, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen“ hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv“ erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg

Berlin-Wilmersdorf

Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

## Inhalt:

	Seite
Meyer zur Capellen, W., Die Beschleunigungsänderung. II. Mitteilung. Mit 13 Abbildungen .....	73
Mitterlehner, G., Die Lenkstabilität des luftbereiften Kraftwagens gegenüber kleinen Störungen. Mit 8 Abbildungen .....	88
Bogunović, V., Der durchlaufende Balken auf äquidistanten elastischen Stützen. Mit 8 Abbildungen .....	104
Wittmeyer, H., Torsionseigenfrequenzen von Kreisscheiben veränderlicher Dicke	113
Wittmeyer, H., Biegeeigenfrequenzen eines gelenkig gelagerten Balkens. Mit 1 Abbildung .....	117
Engl, W., Weiterführung der Sobreroschen Theorie des ebenen Spannungszustandes. Mit 4 Abbildungen .....	128



## Zehnter Internationaler Kongreß für Angewandte Mechanik

Der Zehnte Internationale Kongreß für Angewandte Mechanik wird im Kongreßgebäude von Stresa (Lago Maggiore, Italien) in der Zeit von **Mittwoch, 31. August bis Mittwoch, 7. September 1960** abgehalten werden.

Außer einer Anzahl von vorgeplanten Allgemeinen Vorträgen werden die Arbeitssitzungen des Kongresses folgende zwei Sektionen umfassen:

**Sektion 1:** Dynamik der Flüssigkeiten (Hydro- und Aerodynamik),

**Sektion 2:** Dynamik der Festkörper (starrer Körper, Schwingungen, Elastizität, Plastizität).

Der Zehnte Kongreß wird dagegen weder Probleme der Thermodynamik noch Rechenmethoden als solche behandeln; doch können spezielle Anwendungen von Rechenmethoden auf einschlägige Probleme der beiden genannten Sektionen als Vorträge angemeldet werden.

Frühere Kongresse haben gezeigt, daß es wünschenswert ist, hinreichend viel Zeit für die einzelnen Vorträge und Diskussionen vorzusehen. Um eine Zeitspanne von je 45 Minuten für jedes Thema (30 Minuten für den Vortrag und 15 Minuten für die Diskussion) zu ermöglichen, wird ein Programm-Komitee eine Auswahl unter den angemeldeten Vorträgen treffen. Daher sollen die Vortragsauszüge **vor 1. Januar 1960 in vier Exemplaren an das Sekretariat des Internationalen Komitees (Delft, Niederlande, Prof.-Mekelweg 2)** eingereicht werden. Diese Auszüge sollen womöglich zwei Schreibmaschinenseiten (DIN A 4 mit etwa 30 Zeilen je Seite) nicht überschreiten, keinesfalls mehr als vier Seiten. Um die Arbeit des Programm-Komitees zu erleichtern, wird empfohlen, die Auszüge in **zwei** der vier offiziellen Kongreßsprachen (deutsch, englisch, französisch, italienisch) abzufassen. Die Verfasser werden außerdem dringend gebeten, die Auszüge sehr klar zu gestalten, weil sie die Grundlage für die Auswahl der Vorträge bilden müssen. **Die Entscheidungen des Programm-Komitees sind endgültig**, und selbstverständlich kann sich das Komitee in keinen Briefwechsel darüber mit den Verfassern einlassen. Diese werden über die Entscheidungen unverzüglich unterrichtet.

Die örtliche Organisation des Kongresses liegt in den Händen des Italienischen Organisations-Komitees (Präsident: *Professor C. Colonnetti*; Sekretär: *Dr. F. Rolla, Consiglio Nazionale delle Ricerche, Ufficio relazioni internazionali. Roma, Piazza delle Scienze 7*). Alle Briefe (ausgenommen die Vortragsauszüge) sind an das **Italienische Organisations-Komitee zu richten**. Auskünfte über Unterkunft sowie Anmeldeformulare können von *Dr. Rolla* ab 1. September 1959 erbeten werden.

Der Exekutiv-Ausschuß des Internationalen Komitees der Kongresse für Angewandte Mechanik:

*C. B. Biezeno*, Präsident;

*Richard V. Southwell*;

*W. T. Koiter*, Sekretär (Delft, Prof.-Mekelweg 2).



Digitized by the Internet Archive  
in 2023



## Die Beschleunigungsänderung

### II. Mitteilung

Von W. Meyer zur Capellen

**1. Einleitung.** In Fortsetzung der I. Mitteilung werden im Folgenden wichtige Sonderfälle und Anwendungen auf Räder- und Kurbeltriebe behandelt.

**2. Besondere Punkte der Ebene.** Wir wenden uns zunächst einigen Sonderfällen und zwar besonderen Punkten sowie Sonderheiten der ganzen bewegten Ebene zu. Für Punkte auf der Kreisungspunktkurve  $k_u$  verschwindet das zweite Glied in  $\mathfrak{R}_n$  aus I (7c), während für Punkte auf dem Wendekreis  $K_w$  das erste Glied in  $\mathfrak{R}_n$  aus I (7c) und das zweite Glied in  $\mathfrak{R}_t$  aus I (7b) verschwindet. Dort ist also  $R_t = db_t/dt$ . Im Schnittpunkt von  $k_u$  und  $K_w$ , d. h. im Ballschen Punkt, verschwindet auch  $R_n$ , mit anderen Worten: Die drei geometrischen Örter, d. h. Kreisungspunktkurve  $k_u$ , Wendekreis  $K_w$  und Tangentialkreis  $K_{RT}$  schneiden sich außer im Momentanpol  $P$  noch im Ballschen Punkt  $U$ , wobei  $\operatorname{tg} \varphi_u = -m/l_0$  ist.

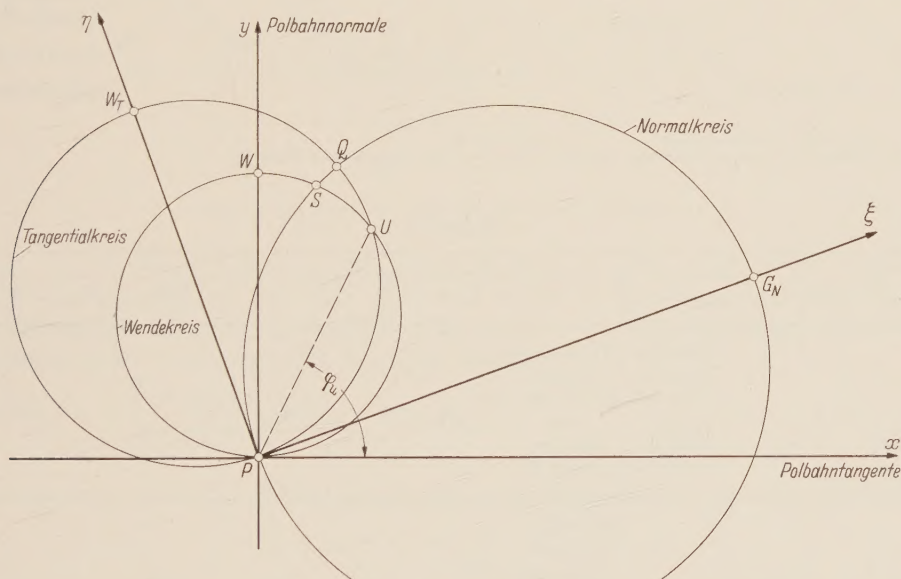


Abb. 1. Zusammenhänge zwischen Wendekreis, Tangentialkreis und Normalkreis.

Ferner ist die Tangentialkomponente  $R_t$  des Ruckes auf dem Wendekreis wie bei der geradlinigen Bewegung gleich der Ableitung der (Tangential-) Beschleunigung. Auch gibt es auf dem Wendekreis einen Punkt, für welchen  $R_t$  noch verschwindet, also  $b_t$  ein Extremum hat. Dies ist der Schnittpunkt  $S$  von Wendekreis und Normalkreis. Setzt man in I (27a) oder in I (18) die Gleichung  $r = D \sin \varphi$  des Wendekreises ein, so folgt für den entsprechenden Strahl der Winkel

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{3 D/m^*}{\varepsilon/\omega^3 - D/R_0}, \quad (1)$$

wobei in den Umformungen der Faktor  $1 + 3 D/l_0 = 1 + D(\tau' - \vartheta') = 1 + D/R_0 - 1 = D/R_0$  nach I (13) geschrieben werden konnte.

<sup>1</sup> I bedeutet I. Mitteilung.

Bei der betrachteten Konfiguration gibt es also sieben wesentliche Punkte (um es nochmals zusammenzufassen): den Momentanpol  $P$ , den Wendepol  $W$ , den Beschleunigungspol  $J$ , den Ruckpol  $Q$ , den Tangentialpol  $W_T$ , den *Ballschen* Punkt  $U$  und den Punkt  $S$  mit extremaler (Tangential-) Beschleunigung; vgl. Abb. 1, in welcher  $J$  nicht eingetragen ist.

**3. Sonderfälle im Gesamtzustand der bewegten Ebene.** a) Kinematisch. (Tabelle 1.) Bemerkenswerterweise liegen dann, wenn die Winkelbeschleunigung der gesamten, allgemein bewegten Ebene ein Extremum hat (Fall 2), keine wesentlichen Besonderheiten vor.

Tabelle 1<sup>1</sup>

Nr.	Merkmal	$g$	$m^*$	$\varphi_J$	$J$	$T$	$N$	$\varphi_0$	$\sigma_Q$	$Q$	Bemerkungen
1	$\varepsilon = 0$	$\infty$	$m$	$\pi/2$	$W$	$\infty$	—	$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{m}{l'_0}$ symmetrisch zum Strahl PU	0	$G_N$	Tangentialkreis gleich Gerade, d. h. identisch Strahl $\varphi_0$ (Senkrechte zu $\mathfrak{R}_P$ )
2	$\dot{\varepsilon} = 0$	—	—	—	—	—	$-3D^2 \sqrt{\left(\frac{1}{m^*}\right)^2 + \frac{1}{l_0^2}}$	—	$\operatorname{tg} \sigma_Q = -\frac{3\varepsilon}{\omega^2}$ $= -\frac{3g}{D}$	—	keine wesentlichen Besonderheiten <sup>2</sup>
3	$\dot{\varepsilon} = \omega^3$	—	—	—	—	—	$\infty$	—	$\pi/2$	$W_T$	Normalkreis gleich Gerade, d. h. identi- tisch Strahl $\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2}$ (Richtung von $\mathfrak{R}_P$ )

<sup>1</sup> Striche heißen: keine Besonderheiten.

<sup>2</sup> der geometrische Ort für  $b_t$  = Extremum gemäß I (27) wird eine Kurve dritter Ordnung.

Tabelle 2

Nr.	Merkmal	$m$	$m^*$	$l$	$l_0$	$k_u$	$k_a$	$T$	$N$	$\varphi_0$	$U, \varphi_u$	$R_{Px}$	$R_{Py}$	Bemerkungen
4	$\vartheta'' = 0$	$\infty$	$g$	—	—	Polbahn- normale und Kreis vom Durch- messer $l$	Polbahn- normale und Kreis vom Durch- messer $l_0$	—	—	$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{g}{l_0}$	$\varphi_U = \frac{\pi}{2}$ $U \equiv W$	—	$3D\omega\varepsilon$	Wen- krei- durch- mess- stati- nähe
5	$\tau' - \vartheta' = 0$	—	—	$D$	$\infty$	—	Polbahn- tangente und Kreis vom Durch- messer $m$	$\frac{Dg}{m^*}$	—	0	(P)	0	—	$R_0 =$ $R_{kg} =$ Kard- lag
6	$2\vartheta' + \tau' = 0$	—	—	$\infty$	$-D$	Polbahn- tangente und Kreis vom Durch- messer $m$	—	—	—	—	—	$3D\omega^3$	—	$R_0 =$ $-D$ $R_{kg} =$ Ump- kehr- Kard- lag
7 <sup>3</sup>	$m = g$	—	$\infty$	—	—	—	—	$\frac{Dm}{l_0}$	$\frac{3D^2\omega^3}{l_0(\varepsilon - \omega^3)}$	$\frac{\pi}{2}$	—	—	0	

<sup>3</sup> gehört ebenso zur Tafel I.



b) Geometrisch. Beiden in Tafel 2 angegebenen Sonderfällen handelt es sich, abgesehen von Nr. 7, um die wichtigsten Entartungen der Kurven  $k_a$  und  $k_u$ , wovon auch bereits an anderen Stellen<sup>1,2</sup> Gebrauch gemacht wurde. Darüber hinaus sind auch Kombinationen der einzelnen Fälle möglich, wie aus den folgenden Beispielen zu erkennen ist.

**4. Rädertriebe.** 1. Beispiel: Allgemeiner Umlaufrädertrieb. Beim einfachen Umlaufrädertrieb (Abb. 2) rollt der Kreis  $k_g$  vom Halbmesser  $R_{kg} = R_r$  auf dem Kreis  $k_r$  vom Halbmesser  $R_0$  ab, und der Steg werde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit angetrieben. Dann ist die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \omega_2$  des rollenden Kreises, d. h. der allgemein bewegten Ebene auch konstant, es ver-

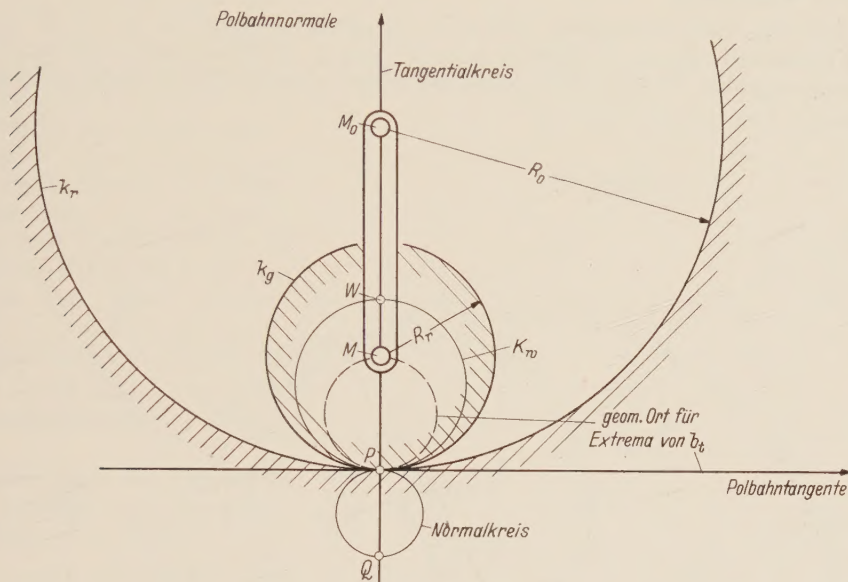


Abb. 2. Zum Ruck am Umlaufrädertrieb mit  $n = R_0/R_r = 3$ .

schwinden  $\varepsilon$  und  $\dot{\varepsilon}$ . Ferner bleibt der Wendekreisdurchmesser  $D$  konstant, d. h.<sup>3</sup> es gilt  $\vartheta'' = 0$ . Somit liegt eine Kombination der Fälle 1), 2) und 4) bzw. 7) vor, welche eine Reihe von Vereinfachungen bringt. So wird  $\varphi_0 = \pi/2$  und  $R_{py} = 0$  sowie  $N = -3 D^2/l_0$ . Der Tangentialkreis fällt mit der Polbahnnormalen zusammen (Abb. 2). Setzt man  $R_0 = n R_r$ , so wird

$$D = R_r \frac{n}{n-1}$$

und

$$\frac{3 D^2}{l_0} = D^2 (\tau' - \vartheta') = D \left( \frac{D}{R_0} - 1 \right),$$

d. h.

$$N = -D \frac{n-2}{n-1} = -\frac{n(n-2)}{(n-1)^2} R_r,$$

also

$$R_{px} = N \omega^3 \quad \text{und} \quad R_n = N \omega^3 \cos \varphi$$

unabhängig von  $r$ , speziell gleich Null für  $\varphi = \pi/2$  (entarteter Tangentialkreis).

Als Besonderheit muß noch die Entartung der Kurve für ein Extremum von  $b_t$  gemäß I (27 b) hervorgehoben werden. Da  $\dot{\varepsilon}$  und  $1/m^*$  verschwinden, gilt jetzt (mit  $R_{kg} = R_r$ )

$$\omega^3 D^2 \sin \varphi \left( -\frac{1}{R_r} + \frac{1}{r} \sin \varphi \right) = 0$$

<sup>1</sup> vgl. Fußnote 2 von S. 58 der I. Mitteilung.

<sup>2</sup> vgl. W. Meyer zur Capellen, Konstruktion 8 (1956) S. 510 sowie 9 (1957) S. 344.

<sup>3</sup> W. Meyer zur Capellen, Arch. Getriebetechnik 4 (1936) S. 44; W. Meyer zur Capellen, Arch. Getriebetechnik 4 (1936) S. 577; W. Meyer zur Capellen, Forschung Ing.-Wes. 24 (1958) H. 6.

oder

$$r = R_r \sin \varphi \quad \text{und} \quad \varphi = 0;$$

d. h. der geometrische Ort zerfällt in den „Halbrollkreis“, d. h. in einen Kreis vom Durchmesser  $R_r$ , welcher die Polbahntangente in  $P$  berührt, und in die Polbahntangente (insgesamt Kurve dritter Ordnung). Im ersten Fall liegen die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte auf dem Kreis vom Durchmesser  $R_0$ , der ebenfalls in  $P$  die Polbahntangente berührt, und im zweiten Fall ist immer  $P$  der Krümmungsmittelpunkt (Abb. 2 für  $n = 3$ ).

Für  $n = \infty$  (Orthozykloide) wird  $D = R_r$  und  $N$  sowie  $R_{px}$ , d. h.  $\mathfrak{R}_p = 0$ . Der eben genannte Kreis wird zum Wendekreis.

2. Beispiel: Die Kardanbewegung. Für  $n = 2$  (Kardanbewegung) ist  $D = 2 R_r = R_0$ , ferner  $N = -R_r$  (Normalkreis gleich „Halbrückkehrkreis“ und  $Q$  der Mittelpunkt von  $K_\psi$ ). Auch läßt sich die Behauptung über die Lage der Punkte, für welche momentan  $b_t$  ein Extremum hat, unmittelbar prüfen.

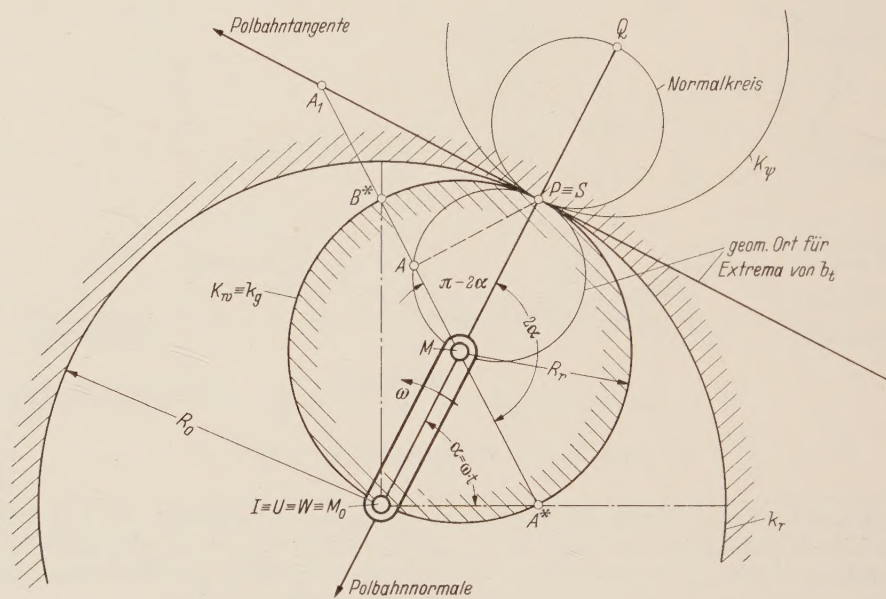


Abb. 3. Zum Ruck am Kardankreispaar ( $n = 2$ ).

Unter Benutzung der auf Seite 55 der I. Mitteilung angegebenen Gleichung für die Ellipse, worin jetzt  $\alpha = \omega t$  den Winkel des Steges bedeutet (Abb. 3), sowie der Formel für  $v$  wird auch

$$v = \frac{\omega}{2} \sqrt{2} \sqrt{(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) \cos 2\alpha}$$

und daraus

$$b_t = \frac{dv}{dt} = -\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{2}} \omega^2 \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{(a^2 + b^2) + (a^2 - b^2) \cos 2\alpha}}.$$

Differentiiert man nochmals, so führt die Bedingung  $db_t/dt = 0$  auf die in  $\cos 2\alpha$  quadratische Gleichung

$$2(a^2 + b^2) \cos 2\alpha + (a^2 - b^2)(\cos^2 2\alpha + 1) = 0$$

mit der Lösung

$$\cos 2\alpha = -\frac{a-b}{a+b},$$

(Die zweite Lösung  $\cos 2\alpha = -\frac{a+b}{a-b} > 1$  scheidet zunächst aus). Liegt der bewegte Punkt  $A$  innerhalb des kleinen Kardankreises, des Rollkreises, so ist  $\overline{A^*A} = a$ ,  $\overline{B^*A} = b$ ,  $R_r = \frac{1}{2} \overline{A^*B^*} = \frac{1}{2}(a+b)$  und  $p = \overline{MA} = \frac{1}{2}(a-b)$ ; d. h. die Bedingung lautet  $\cos(\pi - 2\alpha) = p/R_r$ ; also liegt



wie aus Abb. 3 unmittelbar zu entnehmen, der Punkt  $A$  mit extremer Beschleunigung tatsächlich auf dem obengenannten Extremalkreis<sup>1</sup>.

Liegt der bewegte Punkt  $A_1$  außerhalb des Kardankreises, so ist  $\overline{A^*A_1} = a$ ,  $\overline{B^*A_1} = b$ , aber  $R_r = \frac{1}{2} \overline{A^*B^*} = \frac{1}{2} (a - b)$  und  $\overline{p} = \overline{MA_1} = \frac{1}{2} (a + b)$ ; also gilt dann  $\cos(\pi - 2\alpha) = R_r/\overline{p}$ , somit liegt  $A_1$  auf der Polbahntangente, wie oben behauptet<sup>2</sup>. Würde man hier die Strecke  $b$ , da entgegengesetzt wie vorher, negativ einsetzen, so hätte die zweite Lösung für  $\cos 2\alpha$  auch ihren Sinn. Der Extremalwert selbst wird  $b_t = \mp (a - b) \omega^2$ , also im ersten Fall gleich  $\mp 2 p \omega^2$ , im zweiten Fall gleich  $\pm 2 R \omega^2 = \pm R_0/\omega^2 = \pm D \omega^2 = \pm b_p$ , wie auch zeichnerisch leicht einzusehen, da ja (vgl. oben),  $\overline{AM_0} = b_A$ , wenn  $\omega = 1$  gezeichnet wird.

**5. Kurbeltriebe.** Die folgenden Beispiele betreffen vier allgemeine und vier besondere Fälle.

**1. Beispiel: Kurbelschwinge.** Es soll bei einer Kurbelschwinge (Abb. 4) eine der Stellungen, in denen die Winkelbeschleunigung des Gliedes 3 und damit die Tangentialbeschleunigung des Punktes  $B$  ein Extremum hat, ermittelt werden. Die Beschleunigungen des Punktes  $B$  wurden nach den oben angegebenen Konstruktionen ermittelt, und daraus wurde geschätzt, wo ein Extremum auftritt. In der Nähe dieser Stellung wird nun der Ruck unter Benutzung der in Abb. 4a und b ermittelten Werte für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen bestimmt. Dann ist zunächst, da  $\mathfrak{b}_A \triangleq a \text{ cm}_z$  gezeichnet wurde und

$\omega = \text{konstant}$  ist,  $\mathfrak{R}_A = -v \omega^2$ , also  $R_A \triangleq -a \text{ cm}_z$  und entgegengesetzt gerichtet zu  $v_A$ . Ferner gilt für den Ruck  $\mathfrak{R}_B$  des Punktes  $B$  zunächst Gleichung I (2b), und die Normalkomponente beträgt  $R_{nBA} = 3 v_{BA} \varepsilon_2$  mit  $\varepsilon_2$  als Winkelbeschleunigung der Koppel, wobei  $\varepsilon_2 = b_{tBA}/\overline{AB} = \text{tg } \nu_2$

<sup>1</sup> Dadurch sind die an anderer Stelle gefundenen Ergebnisse in einem breiteren Zusammenhang gerückt; vgl. W. Meyer zur Capellen, Werkstatt und Betrieb 91 (1958) S. 723; ferner Maschinenbautechnik 7 (1958) S. 404, und Vortrag auf der VDI/AWF Fachtagung Getriebetechnik in Konstanz: Über räumliche Kurbelschleifen und ihre gleichwertigen ebenen Getriebe, VDI Getriebeheft Bd. 29 (1958) S. 91. In der hier betrachteten Stellung wird bei der elliptischen Schleife mit dem Steg Null (gleichwertig dem Kreuzgelenk) das Übersetzungsverhältnis  $i = 1$ .

<sup>2</sup> Wendet man auf die Bahn des Punktes  $A$  den Satz von der doppelten Erzeugung der zyklischen Kurven an, so liegt der Punkt  $A$  im zweiten Getriebe wieder auf dem „Halbrollkreis“; vgl. Fußnote 3 von Seite 75; ferner W. Meyer zur Capellen, Konstruktion 8 (1956) S. 268.

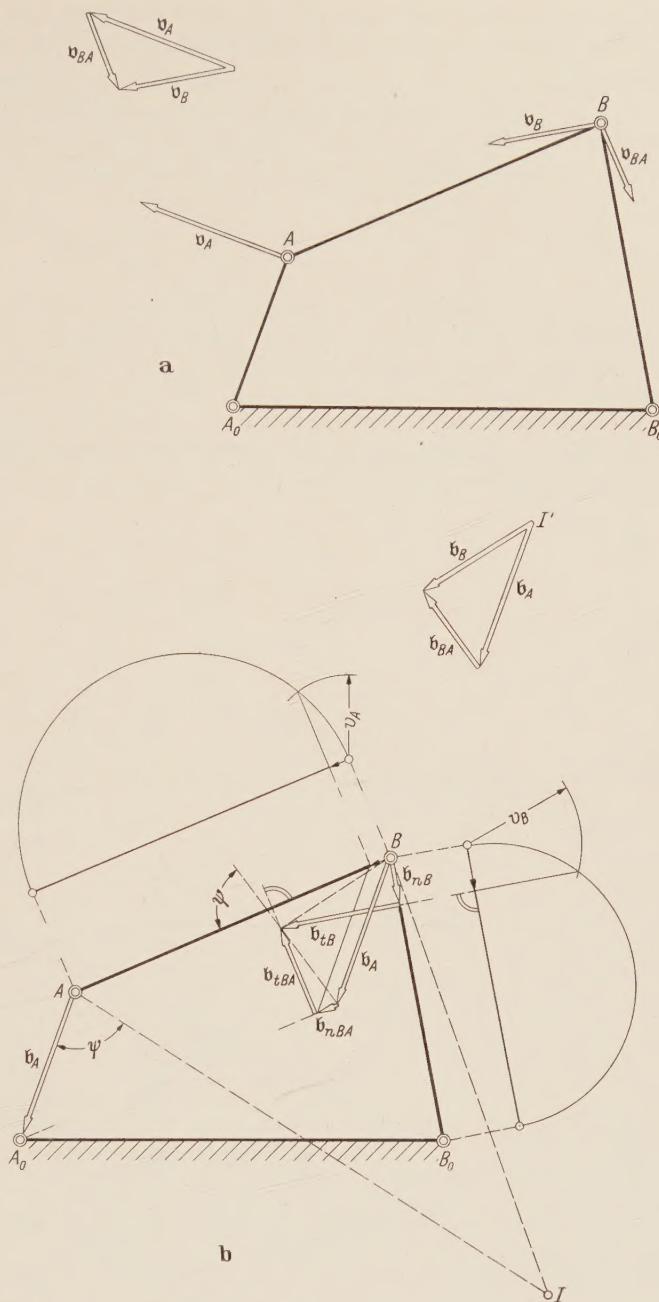


Abb. 4. Zum Ruck an einer Kurbelschwinge in allgemeiner Lage.  
a) Bestimmung der Geschwindigkeiten, b) Bestimmung der Beschleunigungen.

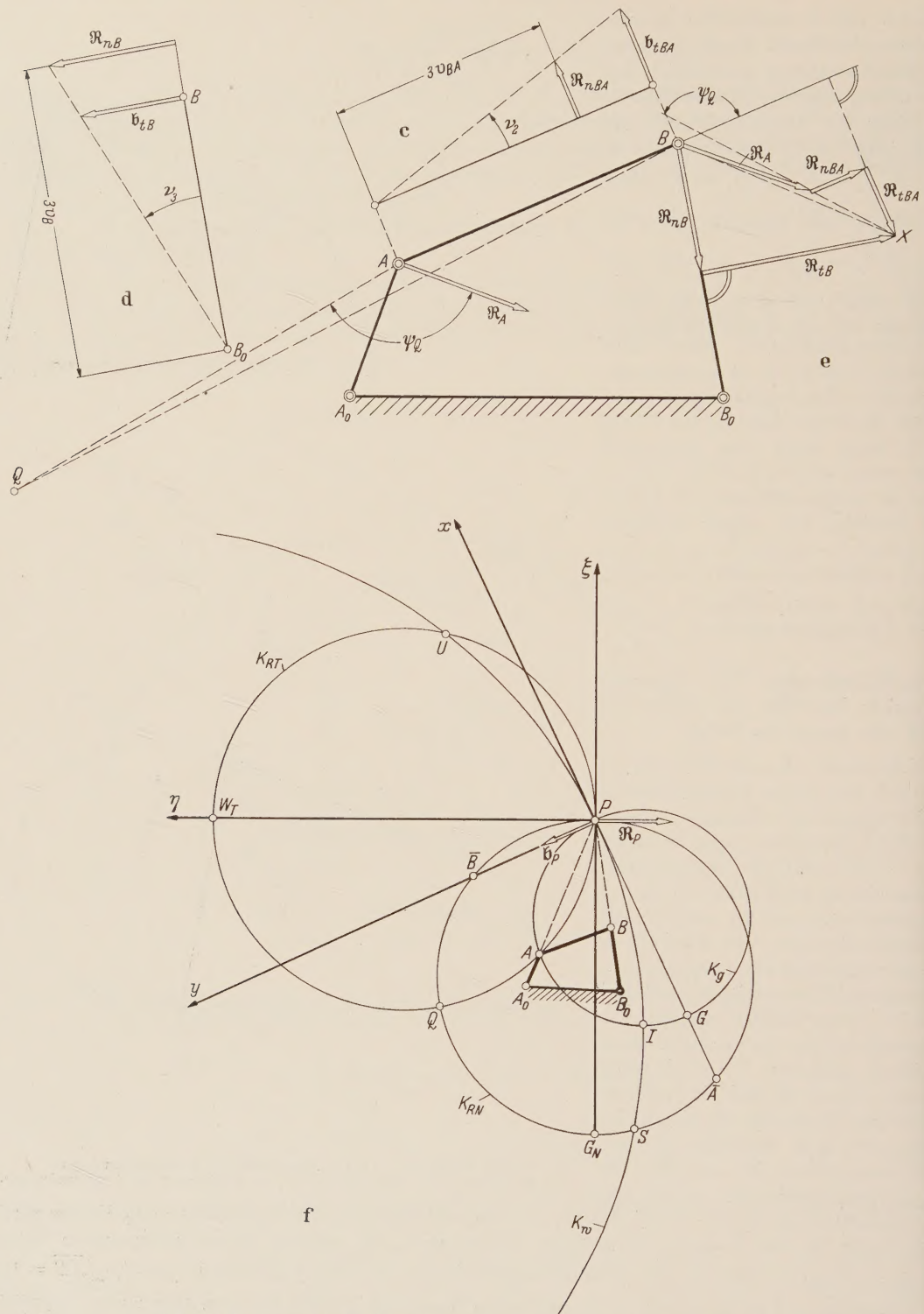


Abb. 4. c) Bestimmung der Ruckkomponente  $R_{nBA} = 3 v_{BA} \cdot \epsilon_3$ , d) Bestimmung der Ruckkomponente  $R_{nB} = 3 v_B \cdot \epsilon_3$ , e) Bestimmung des Ruckes nach dem Satz von Euler, f) die Koppellebene in ihrer Gesamtconfiguration.

ist (Abb. 4c). Somit kann, wie dort gezeigt, sofort  $R_{nBA}$  abgegriffen werden. In gleicher Weise kann  $R_{nB} = 3 v_B \epsilon_3$  ermittelt werden (Abb. 4d). Man trägt nun an die Spitze des in  $B$  angetragenen Vektors  $\mathfrak{R}_A$  (Abb. 4e) den Vektor  $\mathfrak{R}_{nBA}$  parallel zu  $BA$  an, ebenso von  $B$  aus den Vektor



$\mathfrak{R}_{nB}$  auf. Die Senkrechte zu  $B_0B$  im Endpunkt der Spitze von  $\mathfrak{R}_{nB}$  und die Senkrechte zu  $AB$  im Endpunkt der Spitze von  $\mathfrak{R}_{nBA}$  treffen sich in  $X$  und liefern damit die Tangentialkomponenten  $\mathfrak{R}_{tBA}$  und  $\mathfrak{R}_{tB}$  von  $\mathfrak{R}_B = \overrightarrow{BX}$ . Hierin ist nun  $\mathfrak{R}_{tB} = r_B \dot{\varepsilon}_3 - r_B \omega_3^3 = r_B \dot{\varepsilon}_3 - b_{nB} \omega_3$ , wobei der letztere Betrag  $y_2 = b_{nB} \operatorname{tg} \vartheta_3$  mit  $\operatorname{tg} \vartheta_3 = v_B/r_B$  leicht zeichnerisch gewonnen werden könnte.

Abb. 4f zeigt die Kurbelschwinge innerhalb der Gesamtconfiguration.

Wenn nun  $\varepsilon_3$  ein Extremum, also  $\dot{\varepsilon}_3$  gleich Null sein soll, so ist  $R_{tB}$  gleich dem Wert  $y_2$ . Trägt man dann den Quotienten

$$y = \frac{R_{tB}}{r_B \omega_3^3} = \frac{y_1}{y_2}$$

über  $\alpha$  auf (Abb. 5a), so ergeben die Schnittpunkte der Kurve  $y$  mit der Parallelen  $Y = -1$  zur  $\alpha$ -Achse diejenigen Kurbelwinkel  $\alpha$ , für welche  $\varepsilon_3$  ein Extremum hat; vgl. a. Abb. 5b hinsichtlich des Verlaufes von  $\varepsilon_3$  in Funktion des Kurbelwinkels  $\alpha$ . Wohlgemerkt benötigt man die Konstruktion des Ruckes nur in wenigen Stellungen in der Nähe des Extremums. Das Ergebnis der ähnlichen Untersuchung für die Koppel zeigen Abb. 5c und d.

2. Beispiel: Schubkurbel. Bei einem geschränkten Schubkurbelbetrieb ist in Abb. 6a nach dem gleichen Verfahren der für den Ruck erweiterte Satz von Euler benutzt worden, und zwar

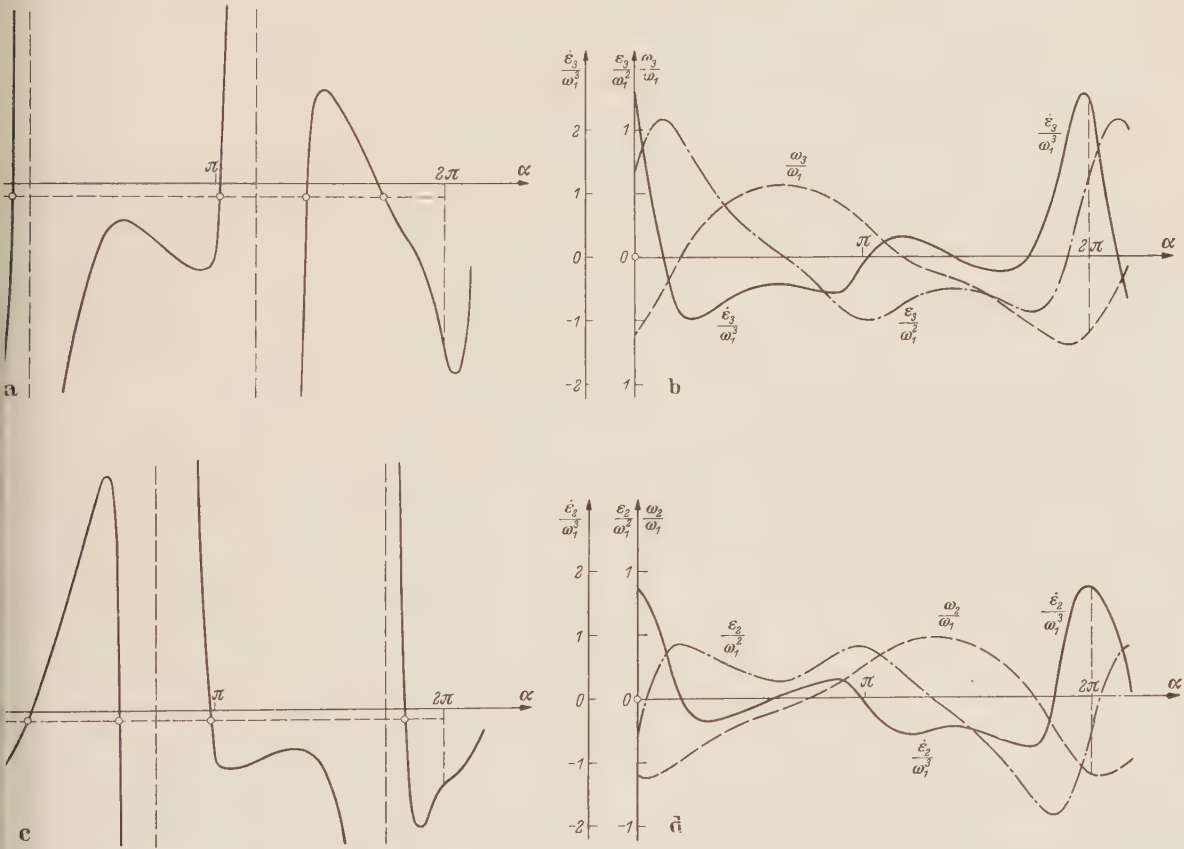


Abb. 5. Zur Ermittlung des Kurbelwinkels  $\alpha$  des Antriebes der Kurbelschwinge nach Bild 4 für die Stellung maximaler Beschleunigung. — a) der Quotient  $y = \frac{R_{tB}}{r_B \omega_3^3}$  ( $\alpha$ ) für die Abtriebsbewegung; b) die Bewegungsgesetze des Abtriebes; c) der Quotient  $x = \frac{R_{tBA}}{r_B \omega_3^3} = h(\alpha)$  für die Koppelbewegung; d) die Bewegungsgesetze der Koppel.

in der Stellung, in welcher die Beschleunigung  $b$  des geradgeführten Punktes  $B$  ein Extremum hat. Die Stellung konnte auf Grund der Maßbeziehungen  $\lambda = a/c = \text{Kurbellänge/Koppellänge}$  und  $\bar{\varepsilon} = e/c = \text{Schränkung/Koppellänge}$  einer anderen Arbeit entnommen werden,<sup>1</sup> und die zeichnerische

<sup>1</sup> W. Meyer zur Capellen u. Mitarbeiter, Bewegungsverhältnisse an der geschränkten Schubkurbel, Forschungsbericht Nr. 449 Opladen 1957.

Lösung bestätigt die dort gefundenen Ergebnisse. Gegenüber Beispiel 1 vereinfacht sich das Verfahren ein wenig, da die Normalkomponente  $R_n$  des Ruckes für  $B$  immer verschwindet.

Für den Bewegungszustand der Koppelenebene ergeben sich in dieser Stellung folgende Besonderheiten:  $B$  ist der Ballsche Punkt  $U$ , d. h.  $B$  liegt auf dem Schnittpunkt von Wendekreis und Tangentialkreis. Da  $R_t = db_t/dt - v^3/\rho^2 = R$  verschwindet, weil  $\rho = \infty$  ist und  $db_t/dt = db/dt$  gleich Null ist, liegt  $B$  auch auf dem Normalkreis, d. h. aber Ruckpol und Ballscher Punkt fallen zusammen, wie in Abb. 6b angegeben ist.

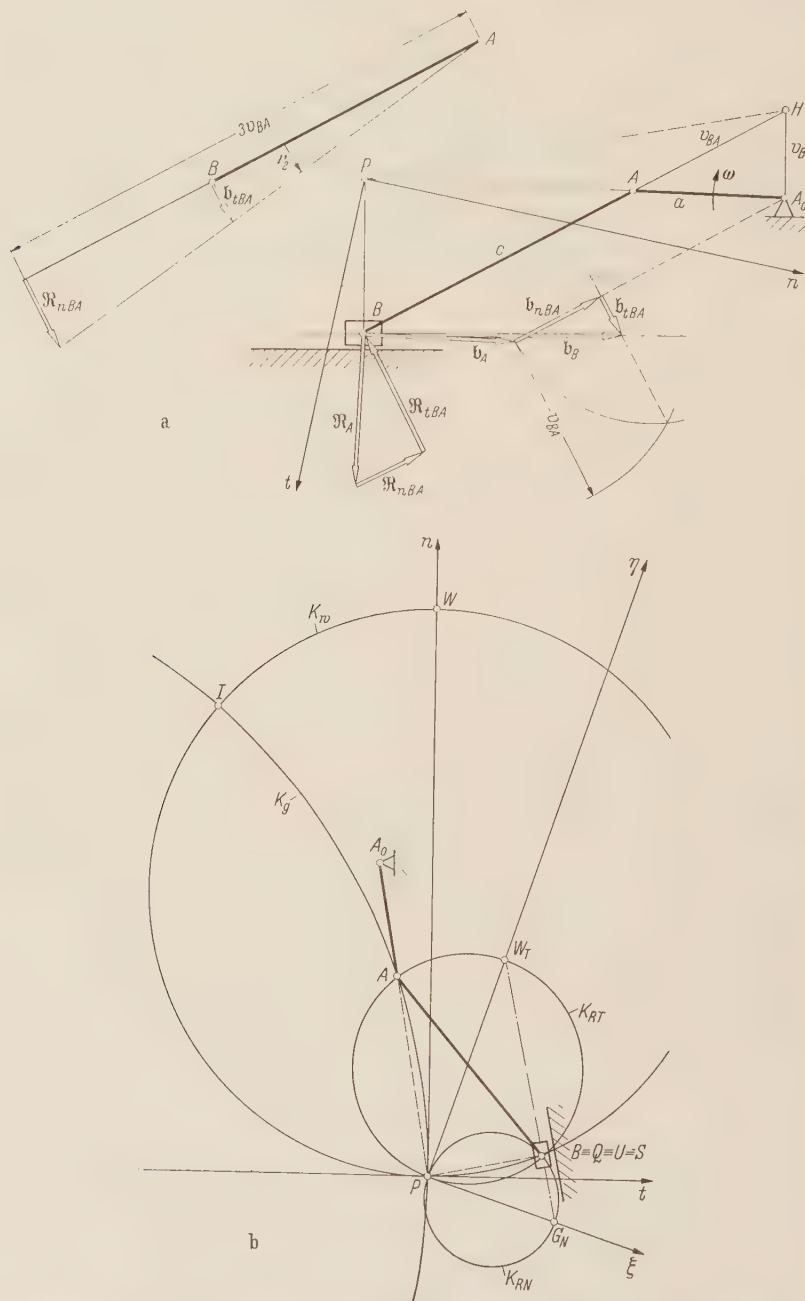


Abb. 6. Der Ruck einer Schubkurbel in der Stellung für die maximale Beschleunigung des Schubgliedes. — a) die Bestimmung der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und des Ruckes des Schubgliedes, b) die Koppelenebene in ihrer Gesamtkonfiguration.

3. Beispiel: Totlage. Wenn eine Kurbelschwinge sich in der Totlage befindet, und die Koppel senkrecht zur Schwinge steht (Abb. 7), so hat, wie sich aus dem Satz von Euler leicht ergibt<sup>1</sup>, die Win-

<sup>1</sup> Vgl. Fußnote 3 von Seite 75.





5. Beispiel: Parallellage. Die Kurbelschwinge befinde sich in der Parallellage, d. h.  $P$  sei unendlich fern (Abb. 9). Dann ist  $\omega_2 = 0$  und, wie an anderer Stelle gezeigt wurde<sup>1</sup>, aber auch

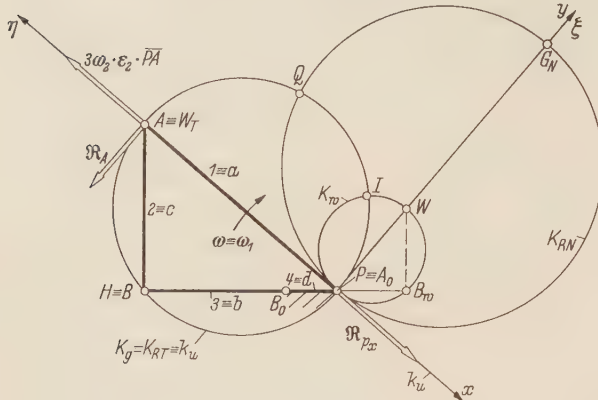


Abb. 8. Die Doppelkurbel in der Steglage  
( $\angle ABB_0 = \pi/2$ ,  $R_A \triangleq a/3$ ).

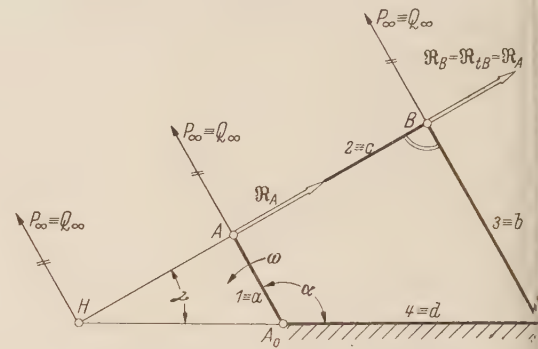


Abb. 9. Die Kurbelschwinge in der Parallellage  
( $\angle ABB_0 = \pi/2$ ,  $Q \equiv P$ ).

leicht mit dem Satz von Euler für die Geschwindigkeiten nachzuweisen ist,  $\varepsilon_3 = 0$ . Damit gilt einerseits

$$R_B = R_A + R_{tBA} + R_{nBA},$$

wobei

$$R_A = (-) a \omega_1^3, \quad R_{nBA} = 3 \omega_2 \varepsilon_2 c = 0$$

und

$$R_{tBA} = c (\dot{\varepsilon}_2 - \omega_2^3) = c \dot{\varepsilon}_2, \quad \text{da} \quad \omega_2 = 0.$$

Andererseits gilt  $R_B = R_{nB} + R_{tB}$ , wobei  $R_{nB} = 3 \omega_3 \varepsilon_3 \overline{B_0B} = 0$ , da  $\varepsilon_3 = 0$ , und beiläufig  $R_{tB} = \overline{B_0B} (\dot{\varepsilon}_3 - \omega_3^3)$  ist. Es muß also  $R_{tBA} = R_{nB}$ , d. h.  $\dot{\varepsilon}_2 = 0$  (und  $R_{tB} = R_A$ ) sein. Ebenso wird, da hier  $R_A = R_{tB}$  und

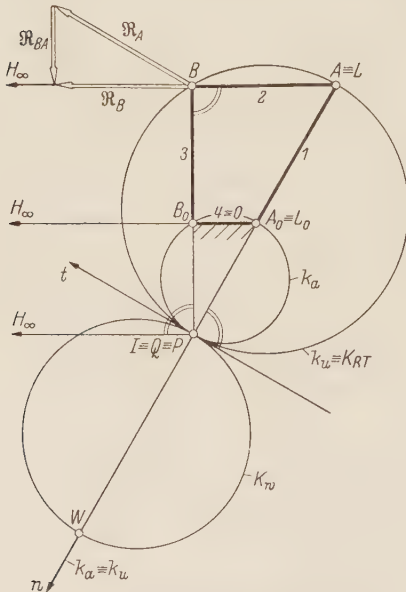


Abb. 10. Die Doppelkurbel in der Parallellage  
( $\angle ABB_0 = \pi/2$ ,  $Q \equiv P$ ).

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\overline{A_0A}}{\overline{B_0B}} = \frac{a}{b}$$

gilt,

$$\dot{\varepsilon}_3 = \frac{a}{b} \left( \frac{a^2 + b^2}{b^2} \right) \omega_1^3$$

gefunden. Im übrigen weist die in Funktion des Kurbelwinkels  $\alpha$  aufgetragene Kurve des Koppelwinkels  $\gamma$  in der betrachteten Stellung ein Extremum auf (da  $\dot{\gamma} = \omega_2 = 0$ ), ebenso die Kurve der Winkelbeschleunigung  $\dot{\gamma}_2 = \varepsilon_2$ , bzw. hat die Kurve für  $\omega_2$  hier einen Wendepunkt (da  $\ddot{\omega}_2 = \dot{\varepsilon}_2 = 0$ ).

6. Beispiel: Doppelkurbel. Betrachtet man die Relativbewegung von Glied 3 gegen Glied 1, d. h. hält man das kleine Glied fest, so erhält man eine Doppelkurbel in der Stellung, in welcher Koppel und Steg einander parallel sind und die Abtriebskurbel senkrecht zum Steg steht (Abb. 10). Aus ähnlichen Überlegungen wie beim Übergang von Beispiel 3 zu Beispiel 4 folgt dann, daß  $\varepsilon_2 = 0$  und  $\varepsilon_3 = 0$  ist.<sup>2</sup> Mit Hilfe der Sätze vom Ruck läßt sich die letztere Besonderheit auch direkt nachweisen. So muß für den Punkt B die auf S. 54 der I. Mitteilung angegebene Winkelbeziehung  $\tan(\kappa + \pi/2) = 3 \tan \psi$  erfüllt sein.

Im übrigen steht nach der *Bobillierschen* Konstruktion der Polbahntangente diese senkrecht zu  $PA$ , d. h. wir haben die Kombination der Fälle 1, 6 und 7 aus Tafel 1 und 2, wobei noch  $l = -PA$  und  $l_0 = -PA_0$  wird. Da Koppel und Steg parallel sind, also der Pol  $P_{31}$  unendlich fern liegt, ist

<sup>1</sup> Vgl. Fußnote 3 von Seite 75, zweite Arbeit, und Fußnote 2 von Seite 75.

<sup>2</sup> Vgl. Fußnote 2 von Seite 77, zweite Arbeit.



nach dem Satz über die Relativpole  $\omega_{31} = 0$ , d. h.  $\omega_1 = \omega_3$ , woraus sofort mit  $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$  ( $R_{nB} = R_{nBA} = 0$ ) und  $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_3 = 0$  der Ruck des Punktes  $B$  zu  $R_B = -\omega_3^3 \overline{B_0B} = -\omega_3^3 b$  und damit

$$\dot{\varepsilon}_2 = -\omega_1^3 \left[ \left( 1 - \frac{d}{c} \right) - \left( 1 - \frac{d}{c} \right)^3 \right]$$

mit  $c = \overline{AB}$  und  $d = \overline{A_0B_0}$  gefunden werden.

7. Beispiel: Kurbelschleife. Bei der zentrischen schwingenden Kurbelschleife nach Abb. 11 ist der Ruck für die Schleife nach den vorhergehenden Konstruktionen (vgl. Abb. 3 der I. Mit-

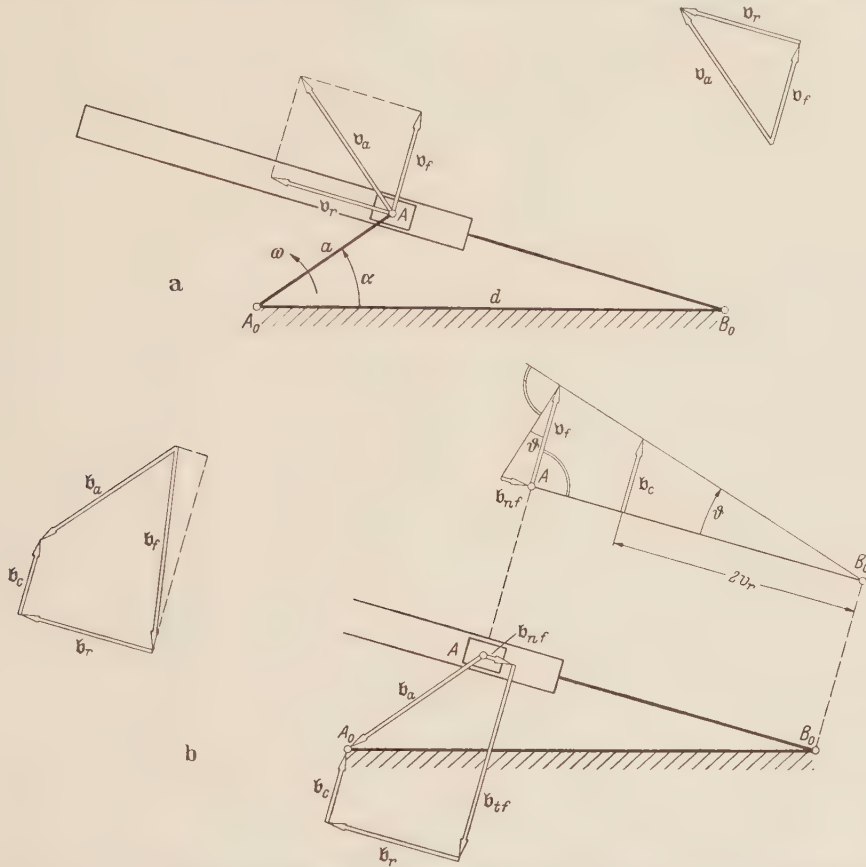


Abb. 11. Der Ruck einer zentrischen schwingenden Kurbelschleife in ihrer Stellung für maximale Abtriebsbeschleunigung. — a) Bestimmung der Geschwindigkeiten, b) Bestimmung der Beschleunigungen.

teilung) ermittelt worden und zwar in derjenigen Stellung, in welcher die Winkelbeschleunigung  $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_f$  ein Extremum hat, also  $\dot{\varepsilon} = 0$  wird, wobei der Antriebswinkel  $\alpha$  sich aus einer quadratischen Gleichung<sup>1</sup> ergibt. Nach der üblichen Geschwindigkeits- und Beschleunigungskonstruktion (Abb. 11a und b), bei welcher  $b_a - b_c - b_r = b_{nf} + b_{if}$ , und  $b_{nf} = v_f^2 / \overline{B_0A} = \overline{B_0A} \operatorname{tg}^2 \vartheta$ ,  $b_c = 2 v_{re} \operatorname{tg} \vartheta$  geschrieben wurde, bestimmt man den Ruck  $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_{abs} = -v_A \omega^2 \hat{=} a_{cm}$  gezeichnet, ebenso die Komponente  $R_{nf}$  des Führungsruckes  $\mathfrak{R}_f$ , d. h.  $R_{nf} = (-) 3 v_f \varepsilon_f = 3 v_f \operatorname{tg} \nu$ , wobei  $\varepsilon_f = b_{if} / \overline{B_0A} = \operatorname{tg} \nu$  gesetzt ist (Abb. 11c) und dann die Komponenten des Zusatzruckes gemäß I (33c), d. h. in Abb. 11d die Komponente  $R_{zus1} = 3 \omega_f b_r = 3 b_r \operatorname{tg} \vartheta$  senkrecht zur Führung gemäß  $\mathfrak{R}_{zus1} = 3 \omega_f \times b_r$ , wobei  $\operatorname{tg} \vartheta = v_f / \overline{B_0A}$  ist, in Abb. 11e schließlich  $R_{zus2} = 3 \varepsilon_f v_r = 3 v_r \operatorname{tg} \nu$ , ebenfalls senkrecht  $b_r$ , gemäß  $\mathfrak{R}_{zus2} = 3 \varepsilon_f \times v_r$  und in Abb. 11f ferner  $\mathfrak{R}_{zus3} = (-) 3 \omega_f^3 v_r = (-) 3 v_r \operatorname{tg}^2 \vartheta$  entgegengesetzt  $v_r$ , daraus  $\mathfrak{R}_{zus}$  als geometrische Summe (Abb. 11g). Man schreibe I (33 b) in der Form

$$\mathfrak{R}_A = -\mathfrak{R}_{nf} - \mathfrak{R}_{zus} = \mathfrak{R}_{if} + \mathfrak{R}_r$$

und trage an  $A$  (Abb. 11h) nacheinander an:  $\vec{A1} = \mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}_a$ ,  $\vec{12} = -\mathfrak{R}_{nf}$ ,  $\vec{23} = -\mathfrak{R}_{zus}$ . Dann trifft die Senkrechte durch 3 zur Führung diese in 4, und es ist  $\vec{A4} = \mathfrak{R}$ , sowie  $\vec{43} = \mathfrak{R}_{if}$ . Da nach

<sup>1</sup> W. Meyer zur Capellen, Werkstatt und Betrieb 89 (1956) S. 581.

I (26b)  $\mathcal{R}_{tf} = \dot{\varepsilon}_f \times \overrightarrow{B_0 A} - \omega_f^2 v_f$  ist und  $\dot{\varepsilon}_f = 0$  sein soll, muß also  $\overrightarrow{A\dot{B}} = -\omega_f^2 v_f$ , d. h. der Betrag gleich  $v_f \operatorname{tg}^2 \vartheta$  sein, wie in Abb. 11i konstruiert und wie sich durch Vergleich beider Strecken zeigt. Es sei ausdrücklich betont, daß es sich um ein Erläuterungsbeispiel handelt, da ja die Lösung der erwähnten quadratischen Gleichung schneller zum Ziel führt.

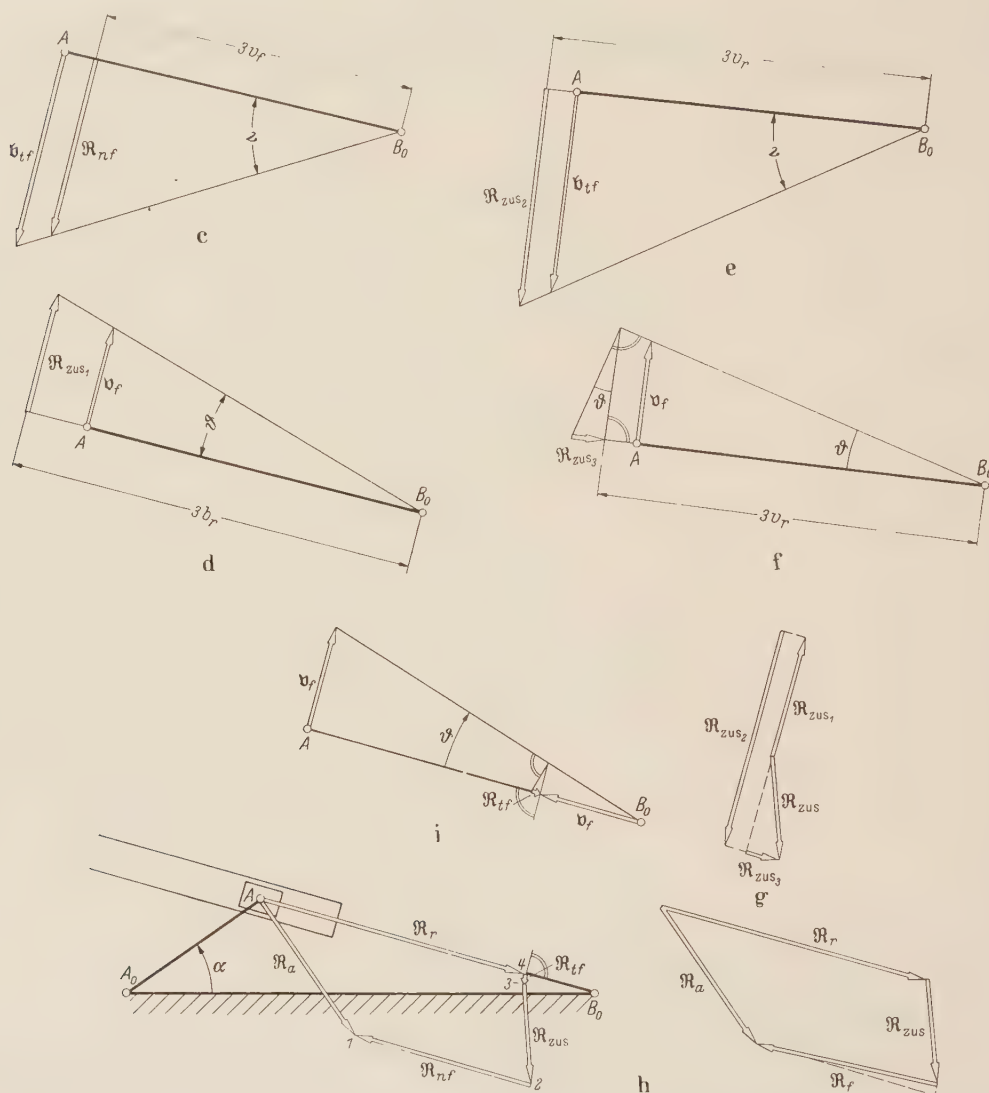


Abb. 11 c) Bestimmung der Ruckkomponente  $R_{nf} = 3 v_f \varepsilon_f$ , d) Bestimmung der Ruckkomponente  $R_{zus1} = 3 b_r \omega_f$ , e) Bestimmung der Ruckkomponente  $R_{zus2} = 3 v_r \varepsilon_f$ , f) Bestimmung der Ruckkomponente  $R_{zus3} = 3 v_r \omega_f^2$ , g) der Ruckvektor  $\mathcal{R}_{zus2}$ , h) die Bestimmung des Ruckes nach dem erweiterten Satz von Euler für die Relativbewegung, i) Bestimmung der Ruckkomponente  $R_{tf} = v_f \omega_f^2$ .

8. Beispiel: Elliptische Schleife. Ebenso wie im vorstehenden 7. Beispiel bei der zentrischen schwingenden Kurbelschleife (Abb. 11) kann auch bei einer zentrischen, schwingenden elliptischen Schleife<sup>1</sup> die Stellung des Antriebes gefunden werden, bei der die Winkelbeschleunigung des Abtriebes  $\varepsilon = \varepsilon_2 = \varepsilon_f$  ein Maximum aufweist,  $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_f$  also demnach Null sein muß, Bild 12. Die Durchführung der Konstruktion, also die Ermittlung der Geschwindigkeiten, der Beschleunigungen und der Komponenten des Rucks erfolgt in gleicher Weise wie für die Kurbelschleife nach dem 7. Beispiel, während diesmal Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck des absolut bewegten Punktes A nach Abb. 4 der I. Mitteilung (vgl. dort Ziff. 3b) in gewohnter Weise gefunden wurden.

<sup>1</sup> Vgl. Fußnote 1 von Seite 77, erste und dritte Arbeit.



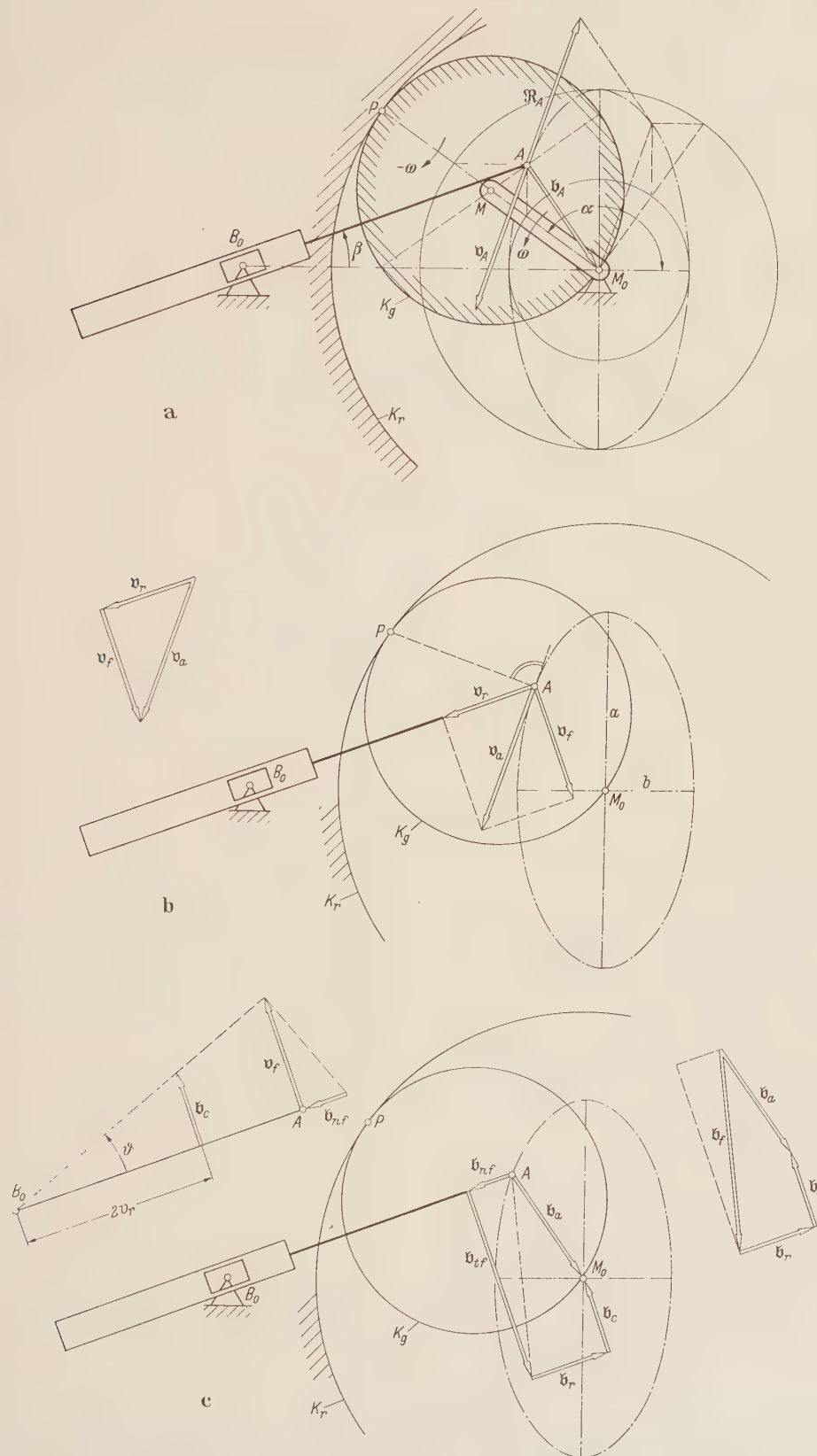


Abb. 12. Der Ruck einer zentrischen schwingenden elliptischen Schleife in ihrer Stellung für maximale Abtriebsbeschleunigung. a) Geschwindigkeit, Beschleunigung und Ruck des Antriebes (durch ein Kardan-kreispaar verwirklicht), b) Bestimmung der Geschwindigkeiten, c) Bestimmung der Beschleunigungen.

Als eine der Möglichkeiten wird die Bahn des Punktes  $A$ , des Antriebes, durch das Kardankreispaar verwirklicht (Abb. 12 a).

In Abb. 12 b wurden die Geschwindigkeiten, in Abb. 12 c die Beschleunigungen mit  $b_c = 2 v_{rel} \times \bar{\omega}_f$  ermittelt. Abb. 12 d bis f zeigt die Komponenten des Ruckes  $\mathfrak{R}_{zus}$ , während in Abb. 12 g und h die

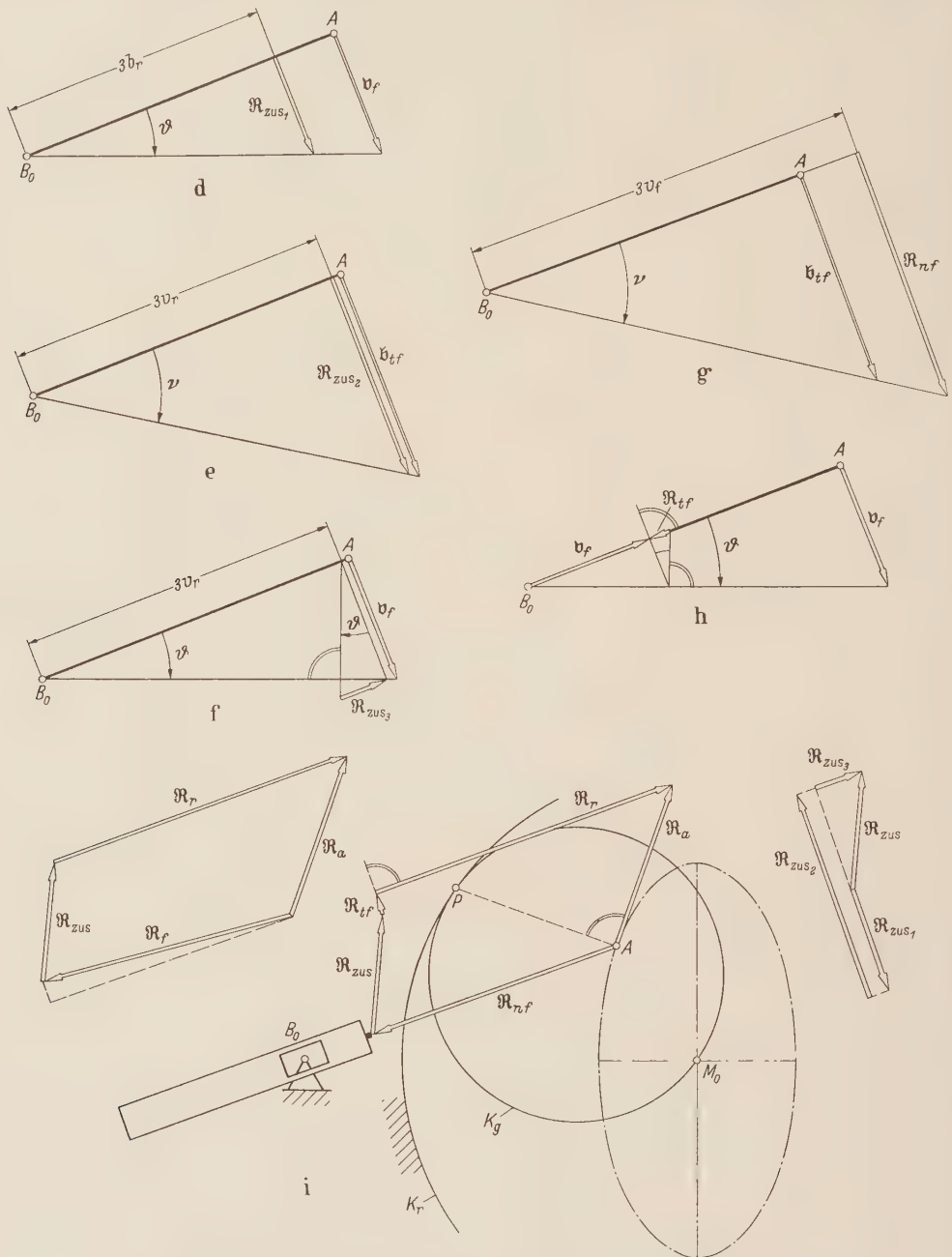


Abb. 12. d) Bestimmung der Ruckkomponente  $\mathfrak{R}_{zus1} = 3 b_r \omega_f$ , e) Bestimmung der Ruckkomponente  $\mathfrak{R}_{zus2} = 3 v_r s_f$ , f) Bestimmung der Ruckkomponente  $\mathfrak{R}_{zus3} = 3 v_r \omega_f^2$ , g) Bestimmung der Ruckkomponente  $\mathfrak{R}_{nf} = 3 v_f s_f$ , h) Bestimmung der Ruckkomponente  $\mathfrak{R}_{tf} = 3 v_f \omega_f^2$ , i) die Bestimmung des Ruckes nach dem erweiterten Satz von Euler für die Relativbewegung.

Komponenten des Ruckes  $\mathfrak{R}_f$  dargestellt sind. Im Besonderen wird hier  $\mathfrak{R}_{tf} = (-) v_f \omega_f^2$  gefunden, da das Getriebe in der Stellung  $\dot{\epsilon}_f = \text{Null}$  gezeichnet ist.

Um diese Stellung in Anlehnung an das 2. Beispiel in Ziff. 4, also den zugehörigen Winkel  $\alpha$  für das Kardankreispaar, zu finden, wird ähnlich wie dort in der Nähe des erwarteten Maximums für



$\varepsilon$  der Wert  $y = y_1/y_2$  mit  $y_1 = R_{tf} = r_f(\dot{\varepsilon}_f - \omega_f^3)$  und  $y_2 = r_f \omega_f^3$  ( $r_f = \text{Strecke } AB_0$ ) über dem Antriebswinkel  $\alpha$  aufgetragen. Der Schnittpunkt der Kurve  $y = y_1/y_2$  mit einer Parallelen  $Y = -1$  zur Abszisse liefert, wie leicht einzusehen ist, denjenigen Winkel  $\alpha$ , bei dem  $\dot{\varepsilon}_f = \text{Null}$ , also die Winkelbeschleunigung des Abtriebes  $\varepsilon_f$  ein Extremum aufweist (Abb. 13). Die angegebene Konstruktion des Ruckes zur Auffindung der Stellung für maximale Abtriebswinkelbeschleunigung ist nur in der Nähe des erwarteten Maximums für  $\varepsilon$  notwendig, zumal  $y = R_{tf}/r_f \omega_f^3$  sehr rasch sein Vorzeichen wechselt, der gesuchte Winkel  $\alpha$  also sehr gut einzugrenzen ist. In Abb. 12i wurde für ein Minimum von  $\varepsilon_f$  die Ruckkonstruktion an der elliptischen Schleife durchgeführt, wie auch der zugehörige Winkel  $\alpha$  in Abb. 13 angegeben wurde. Diese geometrische Konstruktion führt immer und schneller ans Ziel als analytische Verfahren, welche hier in diesem Sonderfall der elliptischen zentrischen Schleife für die Bedingung  $\dot{\varepsilon} = 0$  auf eine Gleichung 10-ten Grades in  $\cos \alpha$  für den entsprechenden Antriebswinkel  $\alpha$  führt.

**6. Zusammenfassung.** Es wurden für die Beschleunigungsänderung oder den Ruck  $\mathfrak{H} = d\dot{b}/dt$  unter Beschränkung auf die ebene Bewegung bei der Zweikurvenführung (Satz von *Euler*) und bei der Relativbewegung Formeln und Sätze aufgestellt, ferner wurde der Zustand der bewegten Ebene hinsichtlich des Ruckes in Erweiterung des Beschleunigungszustandes untersucht und auf weitere

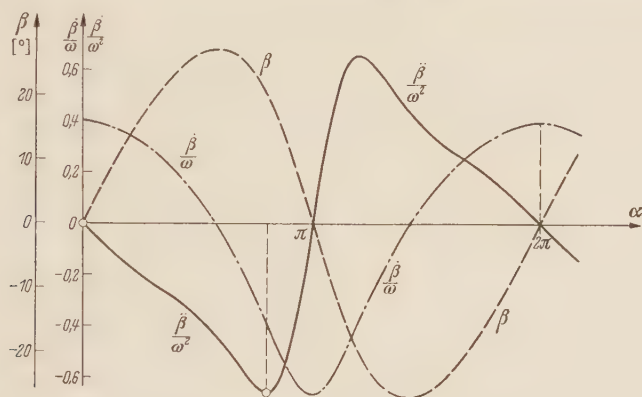


Abb. 13. Die Bewegungsgesetze des Abtriebes der elliptischen Schleife nach Abb. 12.

geometrische Örter hingewiesen. Die Beispiele dienen zur Erläuterung, vor allem aber zur Ermittlung der Extrema der Beschleunigungen in Getrieben. Da die Zeichenarbeit zur Ermittlung der Beschleunigungen selbst schon größer ist als die zur Geschwindigkeitsbestimmung, nimmt es nicht wunder, daß diese Arbeit bei dem Ruck als der zweiten Ableitung der Geschwindigkeit noch wächst — „Differenzieren rauht auf“; aber die erforderlichen Konstruktionen benötigt man nur in wenigen Stellungen, und sie führen schnell zum Ziel.<sup>1</sup>

(Eingegangen am 21. April 1958.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *Walther Meyer zur Capellen*, Aachen, Technische Hochschule.

<sup>1</sup> Bei der Abfassung der Arbeit, insbesondere bei Herstellung der Abbildungen unterstützte mich sehr Herr cand. ing. *K. A. Rischen*, und es sei ihm an dieser Stelle für seine Mühen herzlichst gedankt.

## Die Lenkstabilität des luftbereiften Kraftwagens gegenüber kleinen Störungen

Von G. Mitterlehner

**1. Einleitung.** Die Stabilität des fahrenden Kraftwagens gegen die von der Fahrbahn her und durch Luftkräfte bewirkten Störungen ist ein selten behandeltes Problem. Wie in der gesamten Dynamik des Kraftwagens ist es auch in diesem Fall schwierig, zu allgemein gültigen Lösungen zu gelangen. Der Grund dafür ist, daß das Kraftfahrzeug mit seinen zahlreichen Massen, Federn und Dämpfungselementen ein System von vielen Freiheitsgraden darstellt, das durch vereinfachende Voraussetzungen auf einige wenige Freiheitsgrade reduziert werden muß, bevor eine Berechnung gelingen kann. Durch verschiedene Voraussetzungen entstehen verschiedene Modelle des Kraftwagens, von denen jedes aus der Vielfalt der am Kraftwagen beobachteten Erscheinungen nur wenige wiedergeben kann. Trotzdem wurden damit brauchbare Ergebnisse erzielt, die die Entwicklung beeinflußt haben.

So hat *S. de Lavaud*<sup>1</sup> in mehreren gedankenreichen Arbeiten die Wirkung der gyroskopischen Kopplung zwischen dem „Flattern“ der Vorderräder um ihre Lenkzapfen (Abb. 1) und dem „Trampeln“ der gemeinsamen Vorderachse um eine Achse in der Fahrtrichtung aufgezeigt und der Einzelaufhängung der Vorderräder den Weg gebahnt.

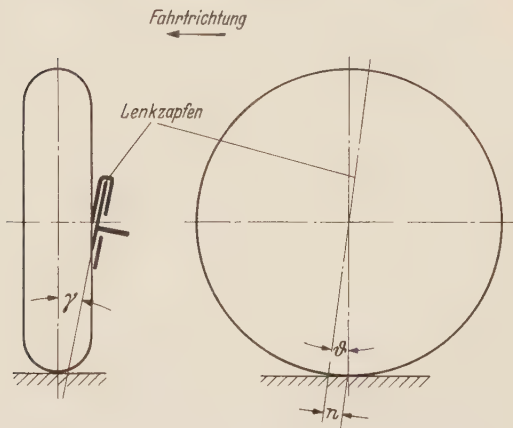


Abb. 1. Spreizung und Nachlauf der Lenkzapfen der Vorderräder.

*H. Fromm*<sup>2</sup> berücksichtigte außerdem das „Schieben“ der Vorderachse normal zur Fahrtrichtung, das infolge des Flatterns der Vorderräder entsteht. Die Fahreigenschaften sind durch den Wegfall der starren Vorderachse wesentlich verbessert worden, doch tritt bei sehr hohen Geschwindigkeiten weiterhin Flattern der Vorderräder auf.

Die Eigenschaften des Luftreifens wurden von *L. Huber*<sup>3</sup> untersucht. Unter Verwendung seiner Ergebnisse berechneten *P. Riekert* und *T. E. Schunck*<sup>4</sup> die Stabilität eines Systems, das neben dem „Schieben“ des gesamten Fahrzeugs das „Gieren“ um die Hochachse des Fahrzeuges berücksichtigt. Dabei wurden auch die Luftkräfte in die Rechnung einbezogen. Die Bewegung des Kraftwagens auf einer Kreisbahn wurde von denselben Verfassern und danach ausführlicher

von *Paslay* und *Slibar*<sup>5</sup> behandelt, die auch den zusätzlichen Leistungsbedarf beim Durchfahren einer Kurve berechneten. Mit der Stabilität eines Fahrzeugs mit in der Geradeaus-Stellung blockierter starrer Lenkung gegenüber seitlichen Windstößen hat sich vor allem *W. Kamm*<sup>6</sup> befaßt.

**2. Die Wirkung einer Unebenheit der Fahrbahn.** Bei Überfahren eines kleinen Einzelhindernisses der Fahrbahn durch ein Vorderrad des Kraftwagens entsteht im allgemeinen ein Moment der Stoßkraft, das die durch die Spurstange verbundenen Vorderräder um ihre Lenkzapfen zu verdrehen sucht. Dieselbe Stoßkraft auf den Lenkzapfen übertragen hat Momente um alle drei Trägheitshauptachsen des Fahrzeuges, von denen je eine mit der Längs-, Quer- und Hochachse zusammenfallen soll. Der Einfluß des Moments um die Längsachse wird durch die Federung des Vorderrades verkleinert, und der Einfluß des Moments um die Querachse ist von vornherein unbeachtlich. Das Moment der Stoßkraft um die Hochachse des Fahrzeuges verhält sich zu dem um den Lenkzapfen

<sup>1</sup> *Sensaud de Lavaud*, Les vitesses critiques d'une voiture automobile und „Causerie scientifique“, beide im Selbstverlag des Verfassers Paris 1927.

<sup>2</sup> *Becker, Fromm, Maruhn*, Schwingungen im Automobillenkungen, Berlin 1931.

<sup>3</sup> *L. Huber*, Die Fahrtrichtungsstabilität des schnellfahrenden Kraftwagens. Deutsche Kraftfahrtforschung, Heft 44, Berlin 1940.

<sup>4</sup> *P. Riekert* und *T. E. Schunck*, Ing.-Arch. 11 (1940), S. 210.

<sup>5</sup> *P. R. Paslay* und *A. Slibar*, Ing.-Arch. 24, (1956) S. 412.

<sup>6</sup> *W. Kamm*, Automobiltechn. Z. 56 (1954) S. 117.



des Vorderrades wie die jeweiligen Kraftarme und ist infolge der Spreizung (Abb. 1) des Lenkzapfens mindestens 20 mal so groß wie das letztere. Die Drehmasse des Fahrzeugs um seine Hochachse ist dagegen etwa 1000 mal so groß wie die des Vorderrades um den Lenkzapfen, so daß nur das Einschlagen der durch die Spurstange verbundenen Vorderräder mit seinen Folgen und nicht der reduzierte exzentrische Stoß um die Hochachse gefährlich werden kann.

Das Fahrzeug wird als lineares System mit drei Freiheitsgraden-Flatterschwingung der Vorderräder, seitliche Schiebung und Gierschwingung um die Hochachse des gesamten Fahrzeugs — angenähert dargestellt. Das Ziel ist das Aufsuchen der Stabilitätsgrenzen und eine Berechnung des sog. Nachlaufes der Vorderräder ( $n$  in Abb. 1), welcher ausreicht, um ein gegebenes Fahrzeug gegen Störungen zu stabilisieren, die von kleinen Unebenheiten der Fahrbahn ausgehen.

Das Wanken des Aufbaus um seine Längsachse soll als vierter Freiheitsgrad des Systems in einer späteren Untersuchung mitbehandelt werden.

**3. Die Stellung der Lenkzapfen der Vorderräder und der Schräglauf der Luftreifen.** Der Lenkzapfen eines Vorderrades steht weder parallel zur Radebene, noch liegt er in der lotrechten Meridianebene des Rades (Abb. 1). Die erste Eigenschaft, die Spreizung, hält das Moment der oben erwähnten Stoßkraft um den Lenkzapfen klein, kann es aber wegen der Reifenbreite nicht ganz zum Verschwinden bringen. Die zweite Eigenschaft, der Nachlauf — der Schnittpunkt des lotrechten Raddurchmessers mit der Fahrbahn folgt in der Fahrtrichtung dem Schnittpunkt des Lenkzapfens mit der Fahrbahn nach — bewirkt ein Moment der beim Einschlagen des Rades auftretenden Seitenkraft  $S$  (Abb. 2) um den Lenkzapfen, das das Rad in seine Geradeaus-Stellung zurückzuführen sucht. Nachlauf und Spreizung werden gewöhnlich als Winkel angegeben, im folgenden wird jedoch als Nachlauf  $n$  der Kraftarm der Seitenkraft  $S$  um den Lenkzapfen bezeichnet.

Nach ausgedehnten Versuchen kam *L. Huber* zu dem Ergebnis, daß ein luftbereiftes Rad eine Seitenkraft nur dann von der Fahrbahn auf das Fahrzeug übertragen kann, wenn die Radebene mit der fortschreitenden Geschwindigkeit des Rades den sogenannten Schräglaufwinkel  $\alpha$  einschließt. Abb. 2 zeigt den Zusammenhang zwischen Seitenkraft und Schräglaufwinkel bei verschiedenen Radlasten. Die Fahrgeschwindigkeit hat auf diese Ergebnisse nur wenig Einfluß, doch scheint bei kleinen Schräglaufwinkeln die Seitensteifigkeit des luftbereiften Rades mit wachsender Geschwindigkeit abzunehmen.

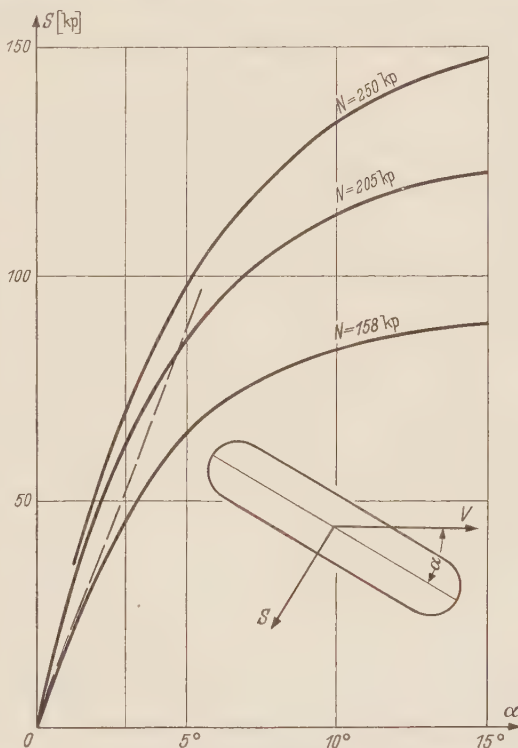


Abb. 2. Seitenkraft über dem Schräglaufwinkel für verschiedene Radlasten nach *L. Huber*.

**4. Voraussetzungen.** Im folgenden wird die Seitenkraft der Radlast  $N$  und dem Schräglaufwinkel proportional angesetzt:

$$S = k_0 N \alpha = k \alpha .$$

Die entsprechende Gerade für  $N = 200$  kp in Abb. 2 zeigt, daß der daraus entstehende Fehler bis zu  $\alpha = 5^\circ$  tragbar erscheint. Damit sind die Grenzen gegeben, innerhalb der das Problem linear behandelt werden kann, wenn auch bereits in diesem Bereich eine bessere Anpassung an die Versuchsergebnisse wünschenswert wäre.

Wegen der Beschränkung der Schräglaufwinkel können die Spuren der Räder auf der Fahrbahn nur schwach gekrümmt sein, so daß die Spuren des rechten und des linken Vorderrades einander gleich angenommen werden können. Dasselbe gilt für die Spuren des rechten und des linken Hinterrades.

Wegen der Kleinheit der Winkel können die Komponenten normal zur Fahrtrichtung der in den Radebenen wirkenden Kräfte, d. i. der Schubkräfte der Treibräder und der Rollwiderstände aller Räder vernachlässigt werden. Durch die Drehung der Räder um ihre Achsen entstehen beim

Gieren des Fahrzeugs um seine Hochachse und beim Einschlagen der Vorderräder Kreismomente um die Längsachse des Fahrzeugs. Sie tragen zum Trampeln der Achsen, dem sogenannten „Shimmy“ bei, das beim Übergang von Hochdruck- auf Niederdruckreifen zusammen mit dem Flattern der Vorderräder erstmals stärker hervortrat und von *S. deLavaud* und *H. Fromm* ausführlich behandelt wurde. Ihr Einfluß auf die Radlastverteilung ist wegen der Kleinheit der Drehmassen der Räder und ihrer Drehgeschwindigkeiten um Hochachse bzw. Lenkzapfen bei nicht zu hohen Fahrgeschwindigkeiten gering und kann in dem gewählten System nicht aufscheinen. Dies ist einer der Gründe, die für eine Ergänzung des Systems durch das Wanken als viertem Freiheitsgrad sprechen.

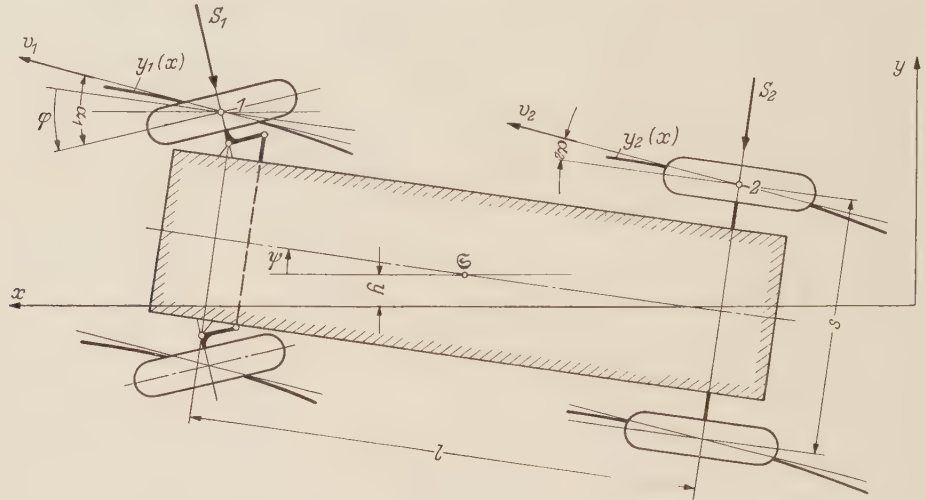


Abb. 3. Grundriß des Fahrzeugs.

Die Radlast wurde zunächst für alle Räder einem Viertel des Fahrzeuggewichts gleichgesetzt und danach der Einfluß des Luftwiderstandes auf die Verteilung der Radlasten auf Vorder- und Hinterräder berücksichtigt. Eine andere Aufteilung der statischen Radlasten bringt keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, macht aber die Rechnung durch das Auftreten zahlreicher weiterer Konstanten unübersichtlich.

**5. Verwendete Bezeichnungen.** Abb. 3 zeigt einen Grundriß des Fahrzeugs und der Spuren der Räder auf der Fahrbahn, wobei die Krümmung der Spuren und die Größe der Winkel übertrieben eingezeichnet sind.

Es bedeuten:

- $C \text{ (m}^{-1} \text{ s}^2\text{)} = m/4k = I_Z/l^2 k$  den „Trägheitsbeiwert“;
- $g \text{ [ms}^{-2}\text{]}$  die Erdbeschleunigung;
- $G \text{ [kp]}$  das Fahrzeuggewicht;
- $i \text{ [1]} = \sqrt{-1}$  die imaginäre Einheit;
- $I_\varphi \text{ [kgm}^2\text{]}$  die Drehmasse eines Vorderrades um seinen Lenkzapfen;
- $I_Z \text{ [kgm}^2\text{]}$  die Drehmasse des Fahrzeugs um seine Hochachse;
- $k_0 \text{ [1]}$  die Seitensteifigkeit eines Rades bei 1 kp Radlast;
- $k \text{ [kp]} = k_0 G/4$  die Seitensteifigkeit eines Rades bei der statischen Radlast,
- $k_\varphi \text{ [kpm]}$  den Rückstellbeiwert der Lenkung;
- $l \text{ [m]}$  den Radstand;
- $m \text{ [kg]}$  die Fahrzeugmasse;
- $n \text{ [m]}$  den Nachlauf der Vorderräder;
- $N \text{ [kp]}$  die Radlast;
- $s \text{ [m]}$  die Spurweite;
- $S_1, S_2 \text{ [kp]}$  die Seitenkraft am Vorderrad, bzw. am Hinterrad;
- $t \text{ [s]}$  die Zeit;
- $v \text{ [ms}^{-1}\text{]}$  die Fahrgeschwindigkeit;
- $x \text{ [m]}$  die Schwerpunktskoordinate in der Fahrtrichtung vom ortsfestem System;
- $y \text{ [m]}$  die Schwerpunktskoordinate der Seitenschiebung von ortsfestem System;
- $y_1, y_2 \text{ [m]}$  die Koordinaten der Bodenberührungspunkte von Vorder- bzw. Hinterrad.



$\alpha_1, \alpha_2$ [1]	die Schräglaufwinkel des Vorderrades, bzw. des Hinterrades;
$\gamma$ [1]	die Spreizung;
$\delta$ [1]	den Nachlaufwinkel;
$\varphi$ [1]	den Lenkwinkel;
$\psi$ [1]	der Gierwinkel;
$\nu$ [s <sup>-1</sup> ]	die Kreisfrequenz;
$\sigma$ [s <sup>-1</sup> ]	das Argument der charakteristischen Gleichung;
$\xi(v)$ [1]	$= \Delta N/N$ die Änderung der Radlast durch den Luftwiderstand.

Die Differentiation nach der  $x$  Koordinate wird durch Striche, die Differentiation nach der Zeit durch Punkte bezeichnet. Der Schnittpunkt des lotrechten Raddurchmessers mit der Fahrbahn wird Bodenberührungspunkt genannt.

**6. Die Bewegungsgleichungen für das Fahrzeug.** In Abb. 3 sind die Radspuren als Funktionen  $y(x)$  des Fahrweges eingezeichnet. Da man wegen der vorausgesetzten Kleinheit der Winkel  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$  und wegen der schwachen Krümmung der Radspuren  $1/\rho \approx y''$  setzen kann, ergeben sich der Schwerpunktsatz in der Richtung der Kurvennormalen und der Momentensatz um die Hochachse zu

$$-m y'' v^2 = 2(S_1 + S_2) = 2k(\alpha_1 + \alpha_2), \quad -I_z \ddot{\psi} = 2(S_1 - S_2)l/2 = kl(\alpha_1 - \alpha_2). \quad (1)$$

Die Neigung der Radspuren in den Bodenberührungspunkten der Räder ist  $y'_1$ , bzw.  $y'_2$ . Damit wird

$$\alpha_1 = y'_1 - \frac{y_1 - y_2}{l} + \varphi, \quad \alpha_2 = y'_2 - \frac{y_1 - y_2}{l}. \quad (2)$$

Wird im Argument der Weg durch die Zeit ersetzt und  $y_1$ , bzw.  $y_2$  durch die Seitenschiebung des Schwerpunkts  $y$  und die Gierwinkel  $\psi$  ausgedrückt, so folgt annähernd

$$\begin{aligned} y_1 &\approx y + s/2 + \psi l/2, & y_2 &\approx y - s/2 - \psi l/2, \\ \dot{y}_1 &\approx \dot{y} + \dot{\psi} l/2, & \dot{y}_2 &\approx \dot{y} - \dot{\psi} l/2 \\ \text{sowie} \quad \dot{y}_1 &\approx y'_1 \dot{x} \approx y'_1 v, & \dot{y}_2 &\approx y'_2 v, & \ddot{y} &\approx y'' \dot{x}^2 \approx y'' v^2. \end{aligned}$$

Damit wird aus (1)

$$-m \ddot{y} = 2k\left(\frac{2}{v} \dot{y} - 2\psi + \varphi\right), \quad -I_z \ddot{\psi} = 2k \frac{l}{2} \left(\frac{1}{v} l \dot{\psi} + \varphi\right). \quad (1a)$$

Unter der Annahme, daß die Fahrzeugmasse in zwei Punkten zwischen den Radpaaren konzentriert werden kann<sup>1</sup>, wird  $I_z = m l^2/4$ .

Mit

$$C = \frac{m}{4k} = \frac{I_z}{l^2 k} = \frac{m}{4k_0 G/4} = \frac{1}{k_0 g}$$

vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu

$$C \ddot{y} + \frac{1}{v} \dot{y} - \psi + \frac{\varphi}{2} = 0, \quad Cl \ddot{\psi} + \frac{l}{v} \dot{\psi} + \varphi = 0, \quad (1b)$$

worin als Konstante nur die Fahrzeuggeschwindigkeit, der Radstand und der „Trägheitsbeiwert“  $C$  vorkommen, der durch die Reifeneigenschaften bestimmt ist.

Da die Gleichungen (1b) den Lenkwinkel  $\varphi$  enthalten, tritt zu ihnen noch die Bewegungsgleichung der Vorderräder um ihre Lenkzapfen, die zunächst möglichst einfach angesetzt wird.

**7. Elastische Bindung der Vorderräder an ihre Geradeaus-Stellung.** Unter der Annahme stationärer Vorwärtsbewegung des Lenkzapfens und bei Vernachlässigung der Normalbeschleunigung kommt mit der Drehmasse  $I_\varphi$  eines Vorderrades um seinen Lenkzapfen zu (1b) noch

$$2 I_\varphi \ddot{\varphi} + k_\varphi \varphi = 0. \quad (1c)$$

Da darin die anderen Koordinaten  $y$  und  $\psi$  nicht vorkommen, beeinflusst zwar die freie ungedämpfte Schwingung der Vorderräder die Bewegung des Fahrzeugs, letztere hat aber in erster Näherung keinen Einfluß auf das Lenksystem. Erst die später vorzunehmende Einführung des Nachlaufes wird diese einseitige Kopplung in eine beiderseitige verwandeln. Tatsächlich tritt allerdings schon durch die Reibung im Lenkzapfen eine weitere Kopplung hinzu.

<sup>1</sup> Wenn man diese Annahme wegläßt und allgemein  $I_z = \mu \frac{m l^2}{4}$ ,  $\mu \neq 1$  setzt, ändert sich die Form der Endergebnisse nur wenig (s. dort).

Wenn die drei Gleichungen (1b) und (1c) miteinander verträglich sein sollen, muß ihre Koeffizientendeterminante verschwinden. Mit den Ansätzen

$$y = y_0 e^{\sigma t}, \quad \psi = \psi_0 e^{\sigma t}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{\sigma t}$$

kommt

$$\begin{vmatrix} \left[ C \sigma^2 + \frac{1}{v} \sigma \right] & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \left[ C l \sigma^2 + \frac{l}{v} \sigma \right] & 1 \\ 0 & 0 & [2 I_\varphi \sigma^2 + k_\varphi] \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Daraus folgt die charakteristische Gleichung sechsten Grades in  $\sigma$

$$a_0 \sigma^6 + a_1 \sigma^5 + a_2 \sigma^4 + a_3 \sigma^3 + a_4 \sigma^2 + a_5 \sigma + a_6 = 0 \quad (4)$$

mit den Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= C^2 l \cdot 2 I_\varphi, & a_1 &= \frac{2 C l}{v} \cdot 2 I_\varphi, & a_2 &= C^2 l k_\varphi + \frac{l}{v^2} 2 I_\varphi, \\ a_3 &= \frac{2 C l}{v} k_\varphi, & a_4 &= \frac{l}{v^2} k_\varphi, & a_5 &= a_6 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dieses System erfüllt nicht die *Hurwitzsche* Stabilitätsbedingung durchweg positiver  $a_i$ . Streng genommen ist die gesamte Bewegung des Fahrzeugs weder stabil, noch stabilisierbar, da in (1b) bzw. (3) bei den Koordinaten  $y$  und  $\psi$  die Rückstellglieder fehlen. Das bedeutet, daß weder der Schwerpunkt des Fahrzeugs an die  $x$ -Achse in Abb. 3, noch die Richtung seiner Längsachse an die  $x$ -Richtung als Mittellagen gebunden sind. Wäre das anders, so wäre das Fahrzeug nicht lenkbar, da ja dann auch ein Einschlagen der Vorderräder durch den Lenker diese Bindungen nicht aufheben könnte.

Die Rückstellzahl der Lenkung  $k_\varphi$  ist sehr klein bei großer Elastizität des Lenkgestänges oder direkter Lenkung, und kann bei starrem Lenkgestänge und hoher Lenkübersetzung ziemlich groß werden<sup>1</sup>. Man soll daher das Rückstellen der Lenkung möglichst nicht der veränderlichen Elastizität des Lenkgestänges überlassen.

**8. Zur Definition der „Lenkstabilität“.** Das Auffinden sämtlicher Lösungen der charakteristischen Gleichung (4) ist hier auf ganz elementarem Wege möglich. Aus (1c) folgt, daß die Eigenfrequenz der Lenkung  $\nu = \sqrt{k_\varphi / 2 I_\varphi}$  auch eine Eigenfrequenz des Systems (3) sein muß, so daß

$$\sigma_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{k_\varphi}{2 I_\varphi}} \quad (6)$$

das erste Lösungspaar ist, da in algebraischen Gleichungen komplexe Lösungen stets konjugiert auftreten.

Da man außerdem Gleichung (4) durch  $\sigma^2$  kürzen kann, kommt dazu die Doppelwurzel  $\sigma_{5,6} = 0$ .

Wenn man schließlich aus den bereits gefundenen Lösungen die Linearfaktoren bildet und durch deren Produkt  $(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)\sigma^2$  die Gleichung (4) dividiert, so kommt

$$\left( C \sigma + \frac{1}{v} \right)^2 2 I_\varphi l = 0$$

und damit die Doppelwurzel

$$\sigma_{3,4} = -\frac{1}{C v}.$$

Die allgemeine Lösung des Systems (3), z. B. für die Koordinate  $y$  angeschrieben, lautet dann

$$y = b_1 e^{i \sqrt{\frac{k_\varphi}{2 I_\varphi}} t} + b_2 e^{-i \sqrt{\frac{k_\varphi}{2 I_\varphi}} t} + b_3 e^{-\frac{1}{C v} t} + b_4 t e^{-\frac{1}{C v} t} + b_5 + b_6 t. \quad (7)$$

Die Glieder mit dem reellen negativen Exponenten klingen rasch ab und brauchen ebenso wie das absolute Glied nicht berücksichtigt zu werden. Die ersten beiden Glieder ergeben eine ungedämpfte Schwingung mit der Eigenfrequenz der Lenkung und das letzte Glied eine Seitenschiebung mit konstanter Geschwindigkeit.

Für die Koordinate  $\psi$  gilt das entsprechende, hier stellt das letzte Glied eine Drehung des Fahrzeugs um seine Hochachse mit konstanter Drehgeschwindigkeit dar. Man erkennt in den

<sup>1</sup> Siehe Fußnote 1 von Seite 88.



sechsten Gliedern den Einfluß des zu Beginn der Arbeit erwähnten exzentrischen Stoßes auf den in der Fahrtrichtung starr mit dem Fahrzeug verbundenen Lenkzapfen. So klein dieser direkte Einfluß auch ist, so kann er nur durch das Eingreifen des Lenkers ausgeglichen werden, dem dazu genügend Zeit zur Verfügung steht.

Ein zweiter Drehstoß um die Hochachse erfolgt, wenn das Hinterrad dieselbe Unebenheit überfährt. Auch auf guter Fahrbahn überfahren alle vier Räder ständig sehr kleine Unebenheiten, so daß sich die erhaltenen Drehimpulse nahezu aufheben, bzw. nur langsam summieren. Auf jeden Fall verhindert die große Drehmasse des Fahrzeugs um seine Hochachse eine schnelle Änderung der Fahrtrichtung.

Viel gefährlicher ist der indirekte Einfluß des Drehstoßes um den Lenkzapfen eines Vorderrades, da bei der geringen Drehmasse des Lenksystems sein Einschlag verhältnismäßig groß wird und dadurch die großen Trägheitskräfte der gesamten Fahrzeugmasse ins Spiel bringt.

Ein Fahrzeug soll demnach schon dann als stabil angesehen werden, wenn der durch eine kleine Störung verursachte Einschlag des Lenksystems aperiodisch oder unter gedämpfter Schwingungen zurückgeht. Außerdem dürfen die durch den Einschlag der Lenkung ausgelösten Bewegungen des ganzen Fahrzeugs, die gleichzeitig und in ähnlicher Weise ablaufen, keine zu großen Amplituden erreichen. Es ist leicht genug, die erste Bedingung allein zu erfüllen, doch ist die Erfüllung der zweiten Bedingung praktisch viel wichtiger, wie der folgende Abschnitt zeigt.

**9. Berechnung der stationären Amplituden.** Nachdem in Gleichung (7) für die Stabilitätsbetrachtung nur die rein imaginären Lösungen übrigbleiben, führt das Fahrzeug nach einem sehr kurzen Einschwingvorgang harmonische Schiebe- und Gierschwingungen mit der Kreisfrequenz des Lenksystems  $\nu = \sqrt{k_{\varphi}/2 I_{\varphi}}$  aus. Ihre Amplituden  $y_0, \psi_0$  und Phasenlagen  $\Phi, \chi$  gegenüber dem Lenksystem können mit den Ansätzen

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\nu t), \quad y = y_0 \sin(\nu t - \Phi), \quad \psi = \psi_0 \sin(\nu t - \chi)$$

durch Koeffizientenvergleich errechnet werden. Nach Einsetzen in die Bewegungsgleichungen (1b) kommt:

$$\left. \begin{aligned} -C \nu^2 y_0 \sin(\nu t - \Phi) + \frac{1}{v} \nu y_0 \cos(\nu t - \Phi) - \psi_0 \sin(\nu t - \chi) + \frac{\varphi_0}{2} \sin \nu t &= 0, \\ -C l \nu^2 \psi_0 \sin(\nu t - \chi) + \frac{l}{v} \nu \psi_0 \cos(\nu t - \chi) + \psi_0 \sin \nu t &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Da in beiden Gleichungen die Summe des Glieder mit  $\sin \nu t$ , bzw. der Glieder mit  $\cos \nu t$  für sich verschwinden muß, folgt für die Koeffizienten:

$$-C \nu^2 y_0 \cos \Phi + \frac{1}{v} \nu y_0 \sin \Phi - \psi_0 \cos \chi + \frac{\varphi_0}{2} = 0, \quad (I)$$

$$C \nu^2 y_0 \sin \Phi + \frac{1}{v} \nu y_0 \cos \Phi + \psi_0 \sin \chi = 0, \quad (II)$$

$$-C l \nu^2 \psi_0 \cos \chi + \frac{l}{v} \nu \psi_0 \sin \chi + \varphi_0 = 0, \quad (III)$$

$$C l \nu^2 \psi_0 \sin \chi + \frac{l}{v} \nu \psi_0 \cos \chi = 0. \quad (IV)$$

Aus (IV) ergibt sich

$$\operatorname{tg} \chi = -\frac{1}{C \nu v}. \quad (9)$$

Wenn man (III) und (IV) quadriert und addiert erhält man die Amplitude des Gierens

$$\psi_0 = \frac{v \varphi_0}{l \nu \sqrt{(C \nu v)^2 + 1}}. \quad (10)$$

Sie ist für große  $v$  von der Geschwindigkeit praktisch unabhängig (Abb. 4); großer Radstand und hohes  $\nu$  sind günstig, da der Radstand hier die Frequenz nicht beeinflußt.

Durch Quadrieren und Addieren von (I) und (II) ergibt sich mit  $\cos \chi$  aus (9) die Amplitude der Seitenschiebung des Schwerpunkts zu

$$y_0 = \frac{v \varphi_0}{2 l \nu^2 u} \sqrt{4 \nu^2 w + l^2 \nu^2 u}, \quad (11)$$

worin

$$u = [(C \nu v)^2 + 1], \quad w = 1 - l \nu^2 C$$

ist. Ihr in Abb. 5 eingezeichneter Verlauf kann, wie folgt, gedeutet werden: Ohne Schräglauf der Räder müßten bei einer bestimmten Frequenz der Lenkung die Amplituden der Vorderräder und damit auch die des Schwerpunkts  $y_0$  etwa proportional mit der Fahrgeschwindigkeit wachsen. Ein ähnlicher Verlauf zeigt sich aber nur bei langsamer Schwingung des Lenksystems und kleiner Fahrgeschwindigkeit, während bei größerem  $v$  und  $\nu$  infolge der steigenden Massenkräfte große Schräglaufwinkel auftreten, die die Wellen der Radspuren und der Schwerpunktsbahn stark abflachen.

Es zeigt sich hier deutlich, daß eine genügend hohe Frequenz der Lenkschwingung viel wichtiger ist, als ihre starke Dämpfung. Trotz des ungedämpften Lenksystems ist das Verhalten des Fahrzeugs als durchaus stabil zu bezeichnen, solange  $\nu \geq 6,28 \text{ s}^{-1}$  ist. Der Grund, warum die ela-

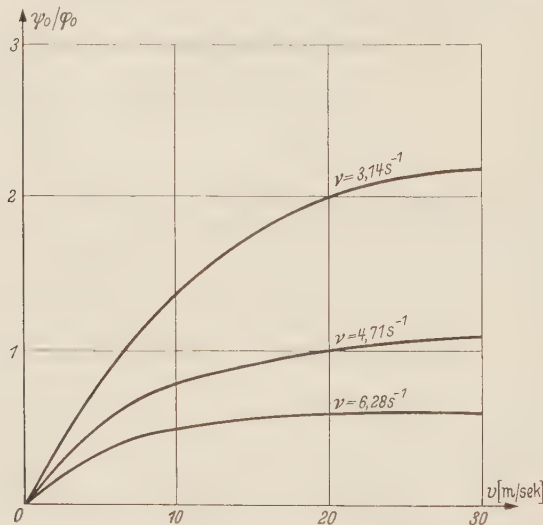


Abb. 4. Gieramplituden bei ungedämpfter Lenkschwingung.

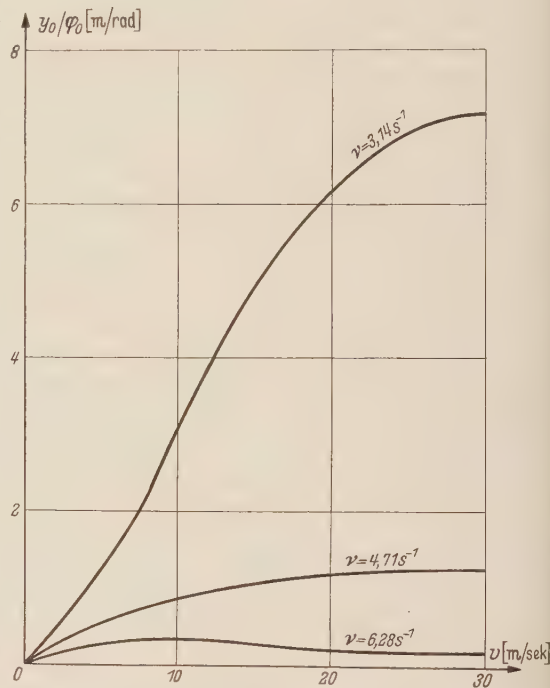


Abb. 5. Amplituden der Seitenschiebung bei ungedämpfter Lenkschwingung.

stische Bindung der Vorderräder an ihre Geradeaus-Stellung nicht zur Stabilisierung verwendet wird liegt wohl darin, daß eine zur Erzielung eines hohen  $\nu$  genügend harte Feder das starke Einschlagen der Räder bei langsamer Fahrt zu sehr erschwert.

Für Sonderzwecke, wie z. B. die Sicherung eines extrem schnellen Fahrzeugs gegen seitliche Windstöße, dürfte die elastische Bindung in Betracht kommen, da in diesem Fall der Nachlauf zumindest zu Beginn der Störung, eine recht bedenkliche Wirkung hat, wie noch später näher ausgeführt werden soll.

Der Vollständigkeit halber sei hier noch der Phasenwinkel zwischen Lenk- und Schiebeschwingung angeführt:

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{-\frac{Cv}{v} \pm \sqrt{K\left(\frac{1}{v^2} + C^2 v^2 + K\right)}}{C^2 v^2 - K} \quad (12)$$

mit

$$K = \frac{4}{v^2 (4 v^2 w + l^2 v^2 u)}$$

Das doppelte Vorzeichen in (12) führt nicht auf zwei verschiedene Amplituden. Die Phasenverschiebung zwischen Schieben und Gieren ist in beiden Fällen die gleiche, es ändert sich nur die Reihenfolge.

**10. Der Nachlauf der Vorderräder.** Werden die Lenkzapfen so geneigt, daß ihre Mittellinien die Fahrbahn vor den Berührungspunkten der Vorderräder treffen, so erhalten die Seitenkräfte  $S$  auf die eingeschlagenen Räder Momente um die Lenkzapfen, die dem Einschlag entgegenwirken. Abb. 6 zeigt eine vereinfachte Darstellung dieses Sachverhalts.



Für ein Vorderrad wird das Rückstellmoment um den Lenkzapfen wegen (2)

$$n S_1 = n k \alpha_1 = n k \left( y_1' - \frac{y_1 - y_2}{l} + \varphi \right) = n k \left[ \frac{1}{v} \left( \dot{y} + \frac{l}{2} \dot{\psi} \right) - \psi + \varphi \right]. \quad (13)$$

Mit  $I_\varphi \ddot{\varphi} + n k \alpha_1 = 0$  und (13) kommt das System

$$\left. \begin{aligned} C \ddot{y} + \frac{1}{v} \dot{y} - \psi + \frac{\varphi}{2} &= 0, \\ C l \ddot{\psi} + \frac{l}{v} \dot{\psi} + \varphi &= 0, \\ \frac{I_\varphi}{n k} \ddot{\varphi} + \frac{1}{v} \dot{\varphi} + \frac{l}{2 v} \dot{\psi} - \psi + \varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

dessen Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} \left[ C \sigma^2 + \frac{1}{v} \sigma \right] & -1 & +\frac{1}{2} \\ 0 & \left[ C l \sigma^2 + \frac{l}{v} \sigma \right] & +1 \\ \frac{1}{v} \sigma & \left[ \frac{l}{2 v} \sigma - 1 \right] & \left[ \frac{I_\varphi}{n k} \sigma^2 + 1 \right] \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

sein muß. Daraus folgt die charakteristische Gleichung sechsten Grades in  $\sigma$

$$a_0 \sigma^6 + a_1 \sigma^5 + a_2 \sigma^4 + a_3 \sigma^3 + a_4 \sigma^2 + a_5 \sigma + a_6 = 0, \quad (16)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= C^2 l \frac{I_\varphi}{n k}, & a_1 &= \frac{2 C l}{v} \frac{I_\varphi}{n k}, & a_2 &= C^2 l + \frac{l}{v^2} \frac{I_\varphi}{n k}, \\ a_3 &= \frac{C l}{v}, & a_4 &= C, & a_5 &= a_6 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

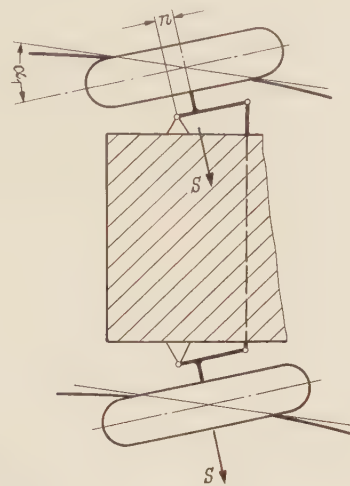


Abb. 6. Schema der Rückstellwirkung des Nachlaufes

Da man (16) durch  $\sigma^2$  kürzen kann, kommt zunächst wieder die Doppelwurzel  $\sigma_{5,6} = 0$ , die in der allgemeinen Lösung des Systems (14) auf ein absolutes und ein mit der Zeit linear anwachsendes Glied führt. Das erstere ist uninteressant und das letztere wurde weiter oben als die Folge des exzentrischen Stoßes auf das ganze Fahrzeug gedeutet, die trotz ihrer Kleinheit nur durch den Lenker behoben werden kann. Bei der Beurteilung der Lenkstabilität müssen daher diese beiden Lösungen ausgeschlossen werden.

Auf die durch  $\sigma^2$  dividierte Gleichung. (16)

$$a_0 \sigma^4 + a_1 \sigma^3 + a_2 \sigma^2 + a_3 \sigma + a_4 = 0 \quad (18)$$

kann man das Stabilitätskalkül nach Hurwitz anwenden, das außer durchweg positivem  $a_i$  in diesem Fall verlangt, daß

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

und  $\Delta_4 = a_4 \Delta_3 > 0$  sein müssen, wenn jede Wurzel von (18) einen negativen Realteil haben soll. Dann setzt sich die allgemeine Lösung des Systems (14), die ähnlich wie (7) angesetzt werden kann, aus vier mit der Zeit abklingenden Gliedern zusammen.

Unter der Annahme, daß sich das System an der Stabilitätsgrenze befindet, d. h., daß rein imaginäre Wurzeln auftreten, muß die Summe der Glieder mit den ungeraden Potenzen von  $\sigma$  in (18) für sich verschwinden. Es wird  $a_1 \sigma^3 + a_3 \sigma = 0$  und daraus mit (17)

$$\sigma_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = \pm i \sqrt{\frac{n k}{2 I_\varphi}}. \quad (19)$$

Mit einem dieser Werte für  $\sigma$  muß jetzt auch die Summe der Glieder mit den geraden Potenzen von  $\sigma$  und des absoluten Gliedes verschwinden. Es muß

$$C^2 l \frac{I_\varphi}{n k} \left( \frac{n k}{2 I_\varphi} \right)^2 + \left( C^2 l + \frac{l}{v^2} \cdot \frac{I_\varphi}{n k} \right) \left( -\frac{n k}{2 I_\varphi} \right) + C = 0$$

sein. Daraus folgt für den Nachlauf

$$n = \frac{4 I_{\varphi}}{C^2 l k} \left( C - \frac{l}{2 v^2} \right), \quad (20)^1$$

eine Bedingung, die mit  $\Delta_3 = 0$  identisch ist. Wenn außerdem  $\Delta_1 > 0$  und  $\Delta_2 > 0$  erfüllt sind, kann man erwarten, daß die beiden restlichen Wurzeln negative Realteile haben, d. h. daß durch (20) die Stabilitätsgrenze in der  $n - v$  Ebene festgelegt ist. Die Bedingung  $\Delta_1 = a_1 > 0$  führt mit (20) in (17) auf  $C - l/2 v^2 > 0$ , der Nachlauf muß also stets positiv sein. Die Bedingung  $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$  führt auf  $C > 0$ . Da in (17)  $a_4 = C$  ist, sind beide Bedingungen schon in der Bedingung durchweg positiver  $a_i$  enthalten. Wegen  $\sigma_{1,2} = \pm i \nu$  ergibt sich mit (20) in (19) die ungedämpfte Eigenfrequenz  $\nu$  an der Stabilitätsgrenze als Funktion der Fahrgeschwindigkeit  $v$  zu

$$\nu = \sqrt{\frac{2}{C l} - \frac{1}{C^2 v^2}}. \quad (21)$$

Die Stabilitätsgrenze (20) in der  $(n, v)$ -Ebene erreicht bei  $v = \sqrt{l/2 C}$  die Abszissenachse, dort wird auch  $\nu = 0$ . Für kleinere  $v$  ist die Abszissenachse selbst Stabilitätsgrenze.

Die beiden restlichen Wurzeln von (18) ergeben sich, wenn man (20) in (18) einsetzt und durch das Produkt der zu  $\sigma_{1,2}$  gehörigen Linearfaktoren

$$(\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2) = \sigma^2 + \frac{n k}{2 I_{\varphi}}$$

dividiert, zu

$$\sigma_{3,4} = -\frac{1}{C v} \pm i \sqrt{\frac{2}{C l} - \frac{1}{C^2 v^2}},$$

wie erwartet, mit negativem Realteil.

Aus (20) wird für  $v = \infty$

$$n = \frac{4 I_{\varphi}}{C l k}. \quad (20a)$$

Mit diesem oder einem größeren Nachlauf ist die Lenkung bei allen Geschwindigkeiten stabil. Für  $I_{\varphi} = 0,06 \text{ kg m}^2$ ,  $C = 1/k_0 g = 0,02 \text{ m}^{-1} \text{ s}^2$ ,  $l = 2 \text{ m}$  und  $k = 1000 \text{ kp}$  wird  $h = 0,006 \text{ m} = 6 \text{ mm}$ . Schon der recht kleine Nachlauf von 6 mm (das sind für ein Rad von 600  $\varnothing$  etwa  $\delta = 1^\circ 10'$  nach der üblichen Bezeichnung) verhindert angefachte Schwingungen. Da einerseits der ausgeführte Nachlauf nach *de Lavaud*  $2^\circ$  bis  $4^\circ$  beträgt und andererseits nach *Becker, Fromm* und *Maruhn* die Wirkungslinie der Seitenkraft nicht durch den geometrischen Bodenberührungspunkt des Rades, sondern etwas dahinter vorbeigeht<sup>2</sup>, ist der mechanisch wirksame Nachlauf der Kraftwagen jedenfalls größer als nach (20a) errechnet wurde.

Die in Abb. 7 als Funktion von  $n$  und  $v$  eingezeichnete Stabilitätsgrenze trennt das Gebiet der gedämpften von dem der angefachten Schwingungen, ohne etwas über die zugehörigen Amplituden auszusagen. Im vorigen Abschnitt wurde gezeigt, daß die Größe der ungedämpften Schiebeamplituden mit sinkender Frequenz stark zunimmt, was auch für die gedämpften gelten muß.

Es ist daher nachzuprüfen, ob im stabilen Bereich in Abb. 7 schwach gedämpfte Schwingungen mit niedriger Frequenz auftreten, die unmittelbar nach der Störung auf große Amplituden der Seitenschiebung führen. Starke Dämpfung bei der gleichen Frequenz ist nicht so bedenklich, da durch sie der Einschlagwinkel  $\varphi$  der Vorderräder beim Überfahren der Störung verringert wird, dem die Schiebeamplituden proportional sind. Deshalb ist auch ein aperiodisches Zurückgehen des Einschlagwinkels nicht gefährlich, wenn die sich daraus ergebende Kursänderung zusammen mit der durch den exzentrischen Stoß um die Hochachse bewirkten vom Lenker behoben wird. Niedriger Frequenzen Schwingungen des Lenksystems und damit des ganzen Fahrzeugs kann der Lenker jedoch nicht leicht entgegenwirken. Das neben dem Verlangsamen der Fahrt beste Mittel, eine flache Kurve zu fahren, ist meist nicht anwendbar.

**11. Die konjugiert komplexen Lösungen der charakteristischen Gleichung.** Da nur die periodischen Lösungen von (18) interessieren und diese konjugiert auftreten, entstehen nur zwei Schwingungen mit den Frequenzen  $\nu_{1,2}$  und  $\nu_{3,4}$ , denen die paarweise konjugiert komplexen Lösungen  $\sigma_{1,2}$  und  $\sigma_{3,4}$  der Gleichung vierten Grades entsprechen. Der Weg, diese Gleichung für beliebig vorgegebene Werte von  $n$  und  $v$  zu lösen und so ein Bild von der Verteilung der Frequenzen  $\nu_{1,2}$  und  $\nu_{3,4}$

<sup>1</sup> Für  $\mu \neq 1$  ist die rechte Seite von (20) mit dem Faktor  $1/\mu$  zu multiplizieren; (19) bleibt unverändert. Die Bedeutung von  $\mu$  ist aus Fußnote 1 auf Seite 91 zu ersehen.

<sup>2</sup> Der dadurch bewirkte sog. „Reifennachlauf“ wächst mit zunehmender Radlast, bzw. mit abnehmendem Innendruck des Luftreifens an und kann bei Niederdruckreifen die Größe von einigen Zentimetern erreichen.





Die Kreisfrequenz  $\nu$  wird Null für  $\nu = \sqrt{l/8C}$ , für kleinere  $\nu$  existieren solche speziellen Lösungen nicht.

Danach soll untersucht werden, ob und für welche Werte von  $n$  und  $\nu$  Lösungen von (18) existieren, die aus zwei konjugiert komplexen und einer reellen Doppelwurzel bestehen. Das Auftreten der letzteren zeigt den Übergang von zwei konjugiert komplexen zu zwei verschiedenen reellen Wurzeln an. Die zugehörige Kurve in Bild 7 bedeutet mechanisch die „Schwingungsgrenze“ zwischen gedämpfter Schwingung und aperiodischem Übergang.

Es soll  $\sigma_{1,2} = x_1 \pm i\nu$ ,  $\sigma_{3,4} = x_2$  sein. Das Produkt der Linearfaktoren ist  $[\sigma - (x_1 + i\nu)][\sigma - (x_1 - i\nu)](\sigma - x_2)^2$ , und nach Entwickeln und Ordnen nach Potenzen von  $\sigma$  wird

$$\sigma^4 - 2(x_1 + x_2)\sigma^3 + (x_1^2 + \nu^2 + x_2^2 + 4x_1x_2)\sigma^2 - [2x_1x_2^2 + 2x_2(x_1^2 + \nu^2)]\sigma + (x_1^2 + \nu^2)x_2^2 = 0$$

Der Koeffizientenvergleich mit (18) ergibt

$$\begin{aligned}\frac{a_1}{a_0} &= \frac{2}{C\nu} = -2(x_1 + x_2), \\ \frac{a_2}{a_0} &= \frac{nk}{I_\varphi} + \frac{1}{C^2\nu^2} = x_1^2 + \nu^2 + x_2^2 + 4x_1x_2, \\ \frac{a_3}{a_0} &= \frac{1}{C\nu} \frac{nk}{I_\varphi} = -2x_1x_2^2 - 2x_2(x_1^2 + \nu^2), \\ \frac{a_4}{a_0} &= \frac{1}{Cl} \frac{nk}{I_\varphi} = (x_1^2 + \nu^2)x_2^2.\end{aligned}$$

Mit

$$x_1 = -\frac{1}{C\nu} - x_2$$

wird aus der zweiten, bzw. dritten Gleichung

$$\begin{aligned}\frac{1}{C^2\nu^2} - \frac{2x_2}{C\nu} - 2x_2^2 + \nu^2 &= \frac{nk}{I_\varphi} + \frac{1}{C^2\nu^2}, \\ -\frac{2}{C\nu}x_2^2 - \frac{2x_2}{C^2\nu^2} - 2x_2\nu^2 &= \frac{1}{C\nu} \frac{nk}{I_\varphi}.\end{aligned}$$

Wenn man die letzte Gleichung mit  $C\nu$  erweitert und von der vorletzten abzieht, folgt  $\nu^2 + 2x_2\nu^2C\nu = 0$ ,  $x_2 = -1/2C\nu$  und nach Einsetzen dieses Wertes für  $x_2$  in die vorletzte Gleichung

$$\nu = \sqrt{\frac{nk}{I_\varphi} - \frac{1}{2C^2\nu^2}}$$

sowie endlich

$$x_1 = -\frac{1}{2C\nu}.$$

Die Werte für  $x_1$ ,  $\nu$  und  $x_2$  in die vierte Gleichung eingesetzt ergeben als Nebenbedingung eine Beziehung zwischen den Parametern  $n$  und  $\nu$

$$n = \frac{I_\varphi}{k} \frac{Cl}{4C^2\nu^2(Cl - 4C^2\nu^2)}. \quad (20b)$$

Das ist die Gleichung der „Schwingungsgrenze“ in Abb. 7. Auf dieser Kurve hat (18) die Lösungen

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{1,2} &= x_1 \pm i\nu = -\frac{1}{2C\nu} \pm i\sqrt{\frac{8C^2\nu^2 - Cl}{4C^2\nu^2(Cl - 4C^2\nu^2)}}, \\ \sigma_{3,4} &= x_2 = -\frac{1}{2C\nu}.\end{aligned}\right\} \quad (21b)$$

Das Minimum dieser Kurve liegt bei  $\nu = \sqrt{l/8C}$ , wo sie von der Geraden nach (20a) berührt wird. In diesem Punkt ( $D$  in Abb. 7) hat die Gleichung (18) eine vierfache negativ reelle Wurzel. Die Realteile der Lösungen sind auf der Kurve und Gerade von vornherein gleich und in Punkt  $D$  verschwinden wegen  $\nu = 0$  die Imaginärteile, die in Anzahl und Größe auf beiden Linien verschieden sind. Auf dem rechten Ast der Kurve ist  $\nu$  reell, dort gibt es außer der negativ reellen Doppelwurzel zwei konjugiert komplexe Wurzeln, d. h. dieser Ast ist die Schwingungsgrenze für eine der beiden Eigenfrequenzen und zwar für  $\nu_{3,4}$ , während  $\nu_{1,2}$  dort noch auftritt. Auf dem linken Ast wird  $\nu$  imaginär, und die zwei konjugiert komplexen Wurzeln verwandeln sich in zwei negativ reelle. Dieser Ast ist die Schwingungsgrenze für  $\nu_{1,2}$ .



Zu einer bestimmten Eigenfrequenz  $\nu$  findet man den auf der Stabilitätsgrenze (20) liegenden Punkt mit

$$\nu^2 = \frac{l}{C(2 - \nu^2 Cl)}, \quad (22)$$

den auf der Geraden (20a) liegenden Punkt mit

$$\nu^2 = \frac{l}{4C(2 - \nu^2 Cl)} \quad (22a)$$

und den auf der Schwingungsgrenze liegenden Punkt mit

$$\nu^2 = \frac{-2 + Cl\nu^2 \pm \sqrt{4 + C^2 l^2 \nu^4}}{8C^2 \nu^2}. \quad (22b)$$

Auf den beiden ersten Linien sind die beiden Eigenfrequenzen gleich  $\nu = \nu_{1,2} = \nu_{3,4}$ , auf dem rechten Ast der Schwingungsgrenze ist  $\nu = \nu_{1,2}, \nu_{3,4} = 0$ . Zwischen Punkt  $D$  und dem Schnittpunkt von Stabilitätsgrenze und Abszissenachse konnte die Schwingungsgrenze mit dem oben geschilderten Verfahren nicht als Funktion von  $n$  und  $\nu$  dargestellt werden. Sie fällt dort für beide Frequenzen  $\nu_{1,2}$  und  $\nu_{3,4}$  zusammen, so daß durch den Koeffizientenvergleich nur zwei Unbekannte zu bestimmen, dafür aber zwei Nebenbedingungen zu erfüllen sind.

In Abb. 7 wurden die Linien gleicher Eigenkreisfrequenz für  $\nu_{1,2} = 0, 5, 6, 7, 10$  und  $15 \text{ s}^{-1}$  eingezeichnet, nachdem zur Kontrolle für einige beliebig gewählte Punkte in der  $n$ - $\nu$  Ebene die Wurzeln der Gleichung (18) mit einem von *A. Leonhard*<sup>1</sup> angegebenen Näherungsverfahren berechnet wurden. Die Linien  $\nu_{1,2} = \text{const}$  verlaufen bei höherer Geschwindigkeit praktisch parallel zur Abszissenachse. Die Linien  $\nu_{3,4} = \text{const}$  breiten sich strahlenförmig im stabilen Bereich zwischen Stabilitätsgrenze und Schwingungsgrenze aus. Für ein gegebenes  $\nu$  nimmt im stabilen Bereich mit wachsenden  $n$  die eine Eigenfrequenz  $\nu_{1,2}$  und ihre Dämpfung zu, die andere Eigenfrequenz  $\nu_{1,2}$  nimmt dagegen ab. Für ein gegebenes  $n$  nimmt mit wachsenden  $\nu$  die Dämpfung allgemein ab und beide Eigenfrequenzen nehmen geringfügig zu.

Daraus folgt, daß der Nachlauf der Vorderräder etwas größer als der Wert nach (20a)  $n = 4J_\varphi / Clk$  ausgeführt werden soll. Bei kleinerem  $n$  geht die Lenkstabilität bei höheren Geschwindigkeiten verloren, während sie durch erhebliche Vergrößerung von  $n$  zumindest nicht wesentlich verbessert werden kann.

Nach (21) ist

$$\nu = \sqrt{\frac{2}{Cl} - \frac{1}{C^2 \nu^2}},$$

d. h. ein großer Radstand ist ungünstig, da er die Eigenfrequenzen des Fahrzeugs herabgesetzt und die Amplituden des Schiebens und Gierens erhöht, wie man erkennt, wenn man mit  $\nu$  aus (21) in (11) bzw. (10) eingeht.

Mit (20a) und  $C = 1/k_0 g$ ,  $k = k_0 G/4$  kann als Richtwert für den Nachlauf zunächst

$$n = \frac{16 I_\varphi}{m l} \quad (20c)$$

angegeben werden. In diesem Ergebnis ist jedoch der Luftwiderstand noch nicht berücksichtigt, was bei hohen Geschwindigkeiten unerlässlich ist.

**12. Der Einfluß der Luftkräfte.** Es wurde vorausgesetzt, daß die resultierende Luftkraft bei Windstille der Schwerpunktgeschwindigkeit des Fahrzeugs entgegengerichtet und deren Quadrat proportional sei von der Form  $W_L = k_L \nu^2$ . Um zu einem mittleren Wert für  $k_L$  zu kommen, wurde angenommen, daß bei  $\nu \approx 50 \text{ km/h}$  der Luftwiderstand die Größe des Rollwiderstands erreiche. Damit wird  $W_L = k_L \nu^2 = G f_R$  und mit  $G = 800 \text{ kp}$ ,  $f_R = 0,02$  wird  $k_L = 0,08$ , was eher etwas zu hoch gegriffen ist.

Mit dem Schwimmwinkel  $\beta$  zwischen Schwerpunktgeschwindigkeit und Fahrzeuglängsachse bzw. genauer mit der Summe des Schwimmwinkels  $\beta$  und des Gierwinkels  $\psi$  multipliziert, hat der Luftwiderstand eine Komponente quer zur Fahrtrichtung. Da in der Einleitung die Schräglaufwinkel und damit auch  $\beta$  und  $\psi$  klein vorausgesetzt wurden, bleibt die Komponente von  $W_L$  sehr klein gegenüber den Seitenkräften der Räder. Dasselbe gilt für den Kraftarm eines etwa auftretenden Moments des Luftwiderstandes um die Hochachse des Fahrzeugs. Bei Windstille können diese Einflüsse kaum zur Anfachung kleiner Schwingungen beitragen, was jedoch nicht gegen die große Gefährlichkeit von seitlichen Windstößen oder des Luftwiderstandes auf ein bereits aus der Bahn geratenes Fahrzeug mit großem Schwimmwinkel spricht.

<sup>1</sup> *A. Leonhard*, Die selbsttätige Regelung, Berlin 1957.

Der Luftwiderstand hat aber noch eine ganz andere Wirkung, die überhaupt nicht von den Amplituden bereits vorhandener Schwingungen abhängt. Da seine Wirkungslinie jedenfalls in einem erheblichen Abstand über die Fahrbahn verläuft, entlastet er die Vorderräder und belastet die Hinterräder in ähnlicher Weise wie die Trägheit beim Beschleunigen des Fahrzeugs. Dadurch setzt er die Lenkstabilität wesentlich herab, wie der Grenzfall der vollkommen entlasteten Vorderräder zeigt, die keine Seitenkräfte mehr aufnehmen können.

Die bezogene Änderung des Raddrucks eines Vorderrades durch den Luftwiderstand ist

$$\frac{N - \Delta N}{N} = \frac{0,25 G - 0,5 k_L v^2 h_L / l}{0,25 G} = 1 - \frac{2 h_L}{G l} k_L v^2 = 1 - \zeta, \quad (23)$$

worin mit dem Abstand des Luftwiderstandes von der Fahrbahn  $h_L = 0,75$  m und den schon früher verwendeten Werten  $\zeta = 0,75 \cdot 10^{-4} v^2$  wird. Damit lauten die Bewegungsgleichungen des Fahrzeugs unter Berücksichtigung von (2) und (2a) und wegen  $k = k_0 N$

$$\left. \begin{aligned} -m \ddot{y} &= 2 k [(1 - \zeta) \alpha_1 + (1 + \zeta) \alpha_2] = 2 k \left( \frac{2}{v} \dot{y} - 2 \psi + \varphi - \zeta \frac{l}{v} \dot{\psi} - \zeta \varphi \right), \\ -I_z \ddot{\psi} &= 2 k \frac{l}{2} [(1 - \zeta) \alpha_1 - (1 + \zeta) \alpha_2] = k l \left( \frac{l}{v} \dot{\psi} + \varphi - 2 \zeta \frac{1}{v} \dot{y} + 2 \zeta \psi - \zeta \varphi \right). \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

und mit  $C = m/4 k = I_z/l^2 k$  kommt nach Ergänzung durch die Bewegungsgleichung der Lenkung das System

$$\left. \begin{aligned} C \ddot{y} + \frac{1}{v} \dot{y} - \psi - \frac{\zeta}{2} \frac{l}{v} \dot{\psi} + \frac{\varphi}{2} (1 - \zeta) &= 0, \\ C l \ddot{\psi} + \frac{l}{v} \dot{\psi} + 2 \zeta \psi - 2 \zeta \frac{1}{v} \dot{y} + \varphi (1 - \zeta) &= 0, \\ \frac{I_\varphi}{n k (1 - \zeta)} \ddot{\varphi} + \varphi + \frac{1}{v} \dot{y} + \frac{l}{2v} \dot{\psi} - \psi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

dessen Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} C \sigma^2 + \frac{1}{v} \sigma & \left[ -\zeta \frac{l}{2v} \sigma - 1 \right] & \frac{1}{2} (1 - \zeta) \\ -2 \zeta \frac{1}{v} \sigma & \left[ C l \sigma^2 + \frac{l}{v} \sigma + 2 \zeta \right] & (1 - \zeta) \\ \frac{1}{v} \sigma & \left[ \frac{l}{2v} \sigma - 1 \right] & \left[ \frac{I_\varphi}{n k (1 - \zeta)} \sigma^2 + 1 \right] \end{vmatrix} = 0 \quad (26)$$

sein soll. Die daraus folgende charakteristische Gleichung (16) vom sechsten Grade in  $\sigma$  hat die Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= C^2 l \frac{I_\varphi}{n k (1 - \zeta)}, & a_1 &= \frac{2 C l}{v} \frac{I_\varphi}{n k (1 - \zeta)}, \\ a_2 &= C^2 l + \frac{I_\varphi}{n k (1 - \zeta)} \left( \frac{l}{v^2} + 2 \zeta C - \zeta^2 \frac{l}{v^2} \right), & a_3 &= \frac{C l}{v} (1 + \zeta), \\ a_4 &= C (1 + \zeta), & a_5 &= a_6 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Man kann die Gleichung daher wieder durch  $\sigma^2$  kürzen, wobei die Bedeutung der Doppelwurzel  $\sigma_{5,6} = 0$  schon bei der Besprechung der Gleichung (5) bis (7) erwähnt wurde.

Übrig bleibt die Gleichung vierten Grades (18) mit den Koeffizienten  $a_0$  bis  $a_4$  in (27), die wieder die Stabilitätsbedingungen [alle  $a_i$  positiv, sowie  $\Delta_1 > 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 > 0$  und  $\Delta_4 > 0$ , siehe Gleichungen (18) ff] erfüllen müssen, wenn (18) nur Wurzeln mit negativen Realteil haben soll. An der Stabilitätsgrenze sind auch rein imaginäre Wurzeln zugelassen und dort muß wieder gelten:

$$a_1 \sigma^3 + a_3 \sigma = 0, \quad \sigma_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{a_3}{a_1}} = \pm i \sqrt{\frac{n k (1 - \zeta^2)}{2 I_\varphi}}. \quad (28)$$

Mit der einen wie mit der anderen dieser Wurzeln muß dann auch der Rest der Gleichung (18) verschwinden, z.B.  $a_0 \sigma_1^4 + a_2 \sigma_1^2 + a_4 = 0$ , worin  $a_0$ ,  $a_2$  und  $a_4$  aus (27) zu entnehmen sind. Daraus ergibt sich nach einigem Umformen die Stabilitätsgrenze als Beziehung zwischen den Parametern  $n$ ,  $v$  und  $\zeta(v)$ :

$$n = \frac{4 I_\varphi}{C^2 l k (1 - \zeta)} \left[ C - \frac{l}{2 v^2} (1 + \zeta) \right]. \quad (29)^1$$

<sup>1</sup> Auch für (29) gilt sinngemäß Fußnote 1 auf Seite 96; (28) bleibt unverändert.

Durch Einführen des Nachlaufs  $n$  nach (29) in die Ausdrücke für die Koeffizienten (27) prüft man, ob die anderen Stabilitätsbedingungen erfüllt sind.  $\Delta_1 = a_1 > 0$  führt auf

$$C - \frac{l}{2v^2} (1 + \zeta) > 0,$$

d. h., daß nur der positive Ast der Kurve (29) Stabilitätsgrenze ist. Die Bedingung  $\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$  führt auf  $C > 0$ . Die Gleichung der Stabilitätsgrenze (29) ist identisch mit  $\Delta_3 = 0$ , weshalb auch  $\Delta_4 = a_4 \Delta_3 = 0$  wird.

Mit (29) in (28) erhält man den Zusammenhang zwischen der Frequenz der ungedämpften Schwingung und der Fahrgeschwindigkeit an der Stabilitätsgrenze:

$$v = \sqrt{\frac{2}{C^2 l} (1 + \zeta) \left[ C - \frac{l}{2v^2} (1 + \zeta) \right]}. \tag{30}$$

Durch Umformen dieses Ausdrucks erhält man für ein vorgegebenes  $v$  eine biquadratische Gleichung für das zugehörige  $n$  an der Stabilitätsgrenze, da man  $\zeta = \zeta(v)$  beachten muß.

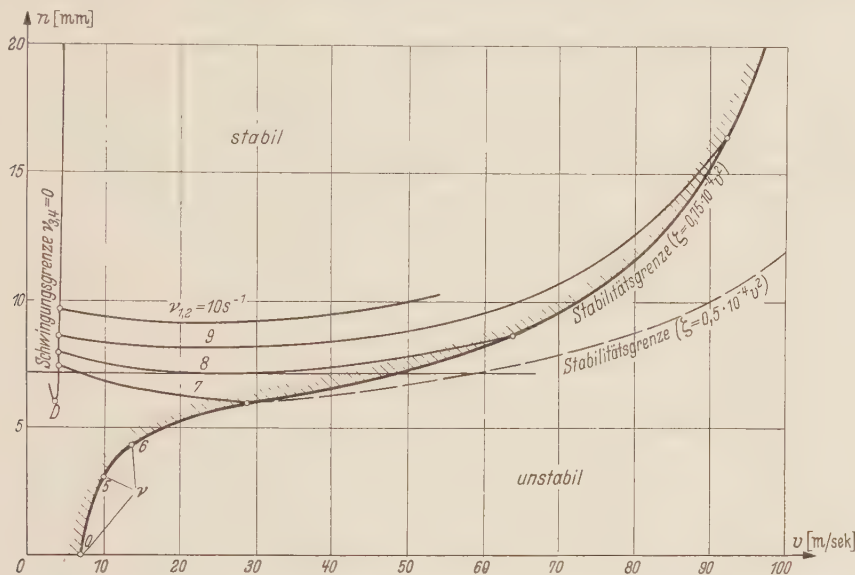


Abb. 8. Stabilitätsgrenze und Linien konstanter Eigenfrequenz bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes.

In Abb. 8 sind die Stabilitätsgrenze bei Berücksichtigung des Luftwiderstandes nach Gleichung (29) und einige Linien konstanter Frequenz  $\nu_{1,2}$  über der Fahrgeschwindigkeit aufgetragen. Allerdings wurden von den Frequenzlinien nur die Punkte auf der Stabilitätsgrenze (29) und auf dem rechten Ast der Schwingungsgrenze (20b) berechnet. Letzteres ist zulässig, da an der Schwingungsgrenze die Geschwindigkeiten so niedrig sind, daß dort der Luftwiderstand keine Rolle spielt. Deswegen konnten auch die  $\nu_{1,2} = \text{konst.}$  Linien ohne Berechnung von weiteren Zwischenpunkten, die jeweils die Lösung einer Gleichung vierten Grades verlangt hatte, mit guter Näherung eingezeichnet werden.

Bei hohen Geschwindigkeiten wird der stabile Bereich infolge der Entlastung der Vorderräder durch den Luftwiderstand stark eingeschränkt, wobei die Windschlüpfigkeit des Fahrzeugs und das Verhältnis der Höhe des Angriffspunktes der Luftkräfte zum Radstand das Ergebnis wesentlich beeinflussen. Außer für die bezogene Radlaständerung  $\zeta = 0,75 \cdot 10^{-4} v^2$  ist die Stabilitätsgrenze (29) auch noch für  $\zeta = 0,5 \cdot 10^{-4} v^2$  eingezeichnet, wobei die letztere Kurve einem geringeren Luftwiderstandsbeiwert bzw. einer tieferliegenden Wirkungslinie des Luftwiderstandes entspricht. Für  $v = 50 \text{ m/s}$ , d. h. für eine Fahrgeschwindigkeit von 180 km/h, ergibt sich der Nachlauf an der Stabilitätsgrenze aus (29) mit  $\zeta = 0,75 \cdot 10^{-4} v^2$  und den vorher benutzten Werten zu  $n = 7,2 \text{ mm}$ ; das entspricht für ein Rad von 600  $\varnothing$  nicht ganz 1,5 Grad Rückwärtsneigung des Lenkzapfens.

**13. Die obere Grenze des Nachlaufs.** Bei der technischen Ausführung des Nachlaufs durch Neigung der Lenkzapfen der Vorderräder (Abb. 1) kann schon aus kinematischen Gründen  $n$  nicht sehr groß werden. Andernfalls würde beim Einschlagen der Vorderräder der Schwerpunkt des Fahrzeugs gesenkt und bei Geradeaus-Stellung der Lenkung wäre zumindest das stehende Fahr-



zeug in einer labilen Gleichgewichtslage. Das könnte allerdings bei einer Ausführung nach Abb 6 mit in der Fahrtrichtung nicht geneigten Lenkzapfen vermieden werden. Es gibt aber noch einen zweiten wichtigen Grund, den Nachlauf nicht über das notwendige Maß hinaus zu vergrößern.

Bisher wurde stets von einer Störung durch eine Unebenheit der Fahrbahn ausgegangen, die zunächst die Vorderräder auslenkt und damit indirekt die Bewegung des Fahrzeugs beeinflusst. Ein seitlicher Windstoß wirkt dagegen zunächst auf den Aufbau des Fahrzeugs und wird zum Teil über die Lenkzapfen auf die Vorderräder übertragen. Daher entsteht infolge des Nachlaufs ein Moment, das die Vorderräder nach der falschen, dem Wind abgewandten Seite einzuschlagen sucht, während ein Einschlagen gegen die Windrichtung zur Erzielung der ausgleichenden Seitenkraft erforderlich wäre. Je größer der Nachlauf, desto empfindlicher reagiert das Fahrzeug auf seitliche Windstöße. Nach Meinung des Verfassers läßt sich dadurch die bekannte Empfindlichkeit gegen Seitenwind gerade vieler schneller, windschnittiger Fahrzeuge zumindest teilweise erklären.

**14. Der Auftrieb.** Im allgemeinen wirkt die resultierende Luftkraft auf einen Kraftwagen nicht genau parallel zur Fahrbahn, so daß zum Luftwiderstand noch ein kleinerer Auftrieb hinzukommt. Dieser sei als Kraft definiert, die die Radlasten aller Räder des Fahrzeugs gegenüber der statischen Radlastverteilung um den gleichen Betrag verändert, während der Luftwiderstand eine Belastungsänderung bewirkt, deren Betrag für ein Radpaar entgegengesetzt gleich dem für das andere ist. Damit kann jede im Windkanal gemessene Radlastverteilung in die Rechnung eingeführt werden. Vorausgesetzt ist allerdings, daß sich der Charakter der Umströmung des Fahrzeugs nicht mit der Fahrgeschwindigkeit ändert. Es muß nun ähnlich wie bei der Berücksichtigung des Luftwiderstandes die durch den Auftrieb bewirkte bezogene Radlaständerung  $\xi^*(v)$  in die Gleichungen (24) und die zugehörige Bewegungsgleichung der Lenkung eingeführt werden.

Um den Einfluß des Auftriebs auf die Stabilität ohne weitere Rechnung zu zeigen, soll hier der Luftwiderstand vernachlässigt werden. Dann genügt es, in den Gleichungen (1a) und in der zugehörigen Bewegungsgleichung der Lenkung (13) die ganzen rechten Seiten, die von den Seitenkräften der Räder stammen, mit dem Faktor  $1 - \xi^*(v) < 1$  zu multiplizieren. Statt dessen kann man sich auch die Masse, bzw. die Drehmassen auf den linken Seiten entsprechend vergrößert denken. In (20) wachsen damit der „Trägheitswert“  $C$  und die Drehmasse des Vorderrades um den Lenkzapfen  $I_\varphi$  im selben Verhältnis, doch wird dadurch der Verlauf der Stabilitätsgrenze auch bei hohen Geschwindigkeiten kaum verändert. Da der Auftrieb die Bodenhaftung und damit die Stabilität des Kraftwagens offenbar verringert, scheint das zunächst ein zweifelhaftes Ergebnis. Es muß hier jedoch daran erinnert werden, daß die Lenkstabilität des Kraftwagens nicht nur von der Lage des betreffenden Zustands im stabilen Bereich der  $n - v$  Ebene sondern auch von der Kleinheit der durch die Störung ausgelösten Schiebe- und Gierschwingungen abhängt. In (21) bewirkt die scheinbare Vergrößerung der „horizontalen“ Massen bzw. Drehmassen durch den Auftrieb eine Verminderung der Eigenfrequenz  $\nu$  an der Stabilitätsgrenze mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit  $v$ ; wenn der Auftrieb den Wert des Gewichts erreicht, wird  $\nu = 0$ ; nach (10) und (11) wachsen dann Gier- und Schiebeamplituden ins unendliche.

Bei einem Kraftwagen kann dieser Zustand nicht erreicht werden, da beim Abheben aller Räder keine Schubkraft zur Überwindung des Luftwiderstandes verfügbar wäre. Außerdem geht die Stabilität infolge Entlastung der Vorderräder durch den Luftwiderstand schon bei viel niedrigerer Geschwindigkeit verloren. Aus dem obigen geht neuerlich hervor, daß nur der Teil der Stabilitätsgrenze praktische Bedeutung hat, auf dem die Eigenfrequenz nicht unter einen bestimmten Wert sinkt. Der andere Teil stellt zwar ebenfalls eine Folge von Zuständen ungedämpfter Schwingungen dar, doch nehmen dabei Schiebe- und Gieramplituden erhebliche Werte an. Da gewöhnlich eine ziemlich schmale Fahrbahn eingehalten werden muß, kann dieser Teil nicht die Grenze eines praktisch stabilen Bereiches bilden. Dazu kommt, daß für große Gier-, Schwimm- und Schräglaufwinkel die getroffenen Voraussetzungen — Seitenkraft proportional Schräglaufwinkel, seitliche Komponente des Luftwiderstandes vernachlässigbar klein — nicht mehr gelten. In Abb. 7 und 8 kommt ein solcher „ungültiger“ Teil der Stabilitätsgrenze nur bei sehr niedriger Fahrgeschwindigkeit vor und ist dort praktisch uninteressant. Nur bei einem Flugzeug, dessen Auftrieb groß gegenüber dem Luftwiderstand ist, wird er bei hohen Geschwindigkeiten auftreten. Bei diesem übernehmen schon lange vor dem Abheben vom Boden Heckflosse und Seitenruder die Stabilisierung.

Schließlich soll nochmals auf die Reihenfolge der Wirkungen der Luftkräfte bei Windstille hingewiesen werden. Bereits vor Eintritt einer Störung vermindern sie die Radlasten zumindest eines Radpaares und machen damit das Fahrzeug für die Störung anfällig. Schon eine kleine Störung kann dann infolge der verminderten Seitenkräfte der Räder zu niederfrequenten Schiebe- und Gier-

schwingungen mit größeren Amplituden führen. Nur in diesem — recht gefährlichen — Fall wird die Anfachung durch die seitliche Komponente des Luftwiderstandes, bzw. durch sein Moment um die Hochachse des Fahrzeugs, wirksam.

**15. Zusammenfassung.** Bei der Definition der Lenkstabilität und der Berechnung der stationären Amplituden wurde gezeigt, daß nicht so sehr die Dämpfung der Lenk-, Schiebe- und Gierschwingungen eines Fahrzeugs wie genügend hohe Eigenfrequenz des zugehörigen Systems für ein stabiles Verhalten absolut notwendig sind. Es wurde daher nicht nur die Stabilitätsgrenze errechnet, sondern auch die Verteilung der Eigenfrequenzen im stabilen Bereich untersucht und zwar zunächst ohne und dann mit Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Abb. 7 und 8 zeigen die Ergebnisse in der  $(n, v)$ -Ebene. Dort hat die Stabilitätsgrenze die Gleichung (20) bzw. (29). In (29) kann für höhere Geschwindigkeiten das zweite Glied in der eckigen Klammer gegenüber dem ersten vernachlässigt werden, es kommt dann mit  $C = 1/k_0 g$ ,  $k = k_0 G/4$

$$n = \frac{16 I_\varphi}{m l (1 - \zeta)}, \quad (29a)$$

worin

$$\zeta = \frac{2 h_L}{G l} k_L v^2$$

mit  $v$  als größter erreichbarer Geschwindigkeit ist. Obwohl  $n$  hier der Nachlauf an der Stabilitätsgrenze ist, dürfte es genügen, diesen Wert durch entsprechende Rückwärtsneigung der Lenkzapfen auszuführen. Der wirksame Nachlauf ist größer, da nach *H. Fromm* die Seitenkraft in der Draufsicht etwas hinter der Radachse angreift. Die oben angeführten Gründe sprechen gegen eine erhebliche Vergrößerung des Nachlaufs über den Wert nach (29a) hinaus.

Der Beiwert  $k_0$ , d. i. die Seitensteifigkeit der Reifen kommt zwar in (29a) nicht vor, wohl aber in der Gleichung (30) der ungedämpften Eigenfrequenz an der Stabilitätsgrenze. Wegen  $C = 1/k_0 g$  sieht man, daß große Seitensteifigkeit der Reifen diese Eigenfrequenz erhöht und damit für die Lenkstabilität günstig ist. Schwieriger ist es, den Einfluß des Radstandes  $l$  zu beurteilen. Ein großer Radstand vergrößert zwar den stabilen Bereich in der  $(n, v)$ -Ebene und verringert die schädliche Änderung der Radlastverteilung infolge des Luftwiderstandes. Andererseits vermindert er die Eigenfrequenz an der Stabilitätsgrenze und begünstigt so das Entstehen von gefährlichen niederfrequenten Schiebe- und Gierschwingungen mit großen Amplituden.

Bei Steigerung der Fahrgeschwindigkeit mit einem gegebenen Fahrzeug ( $n = \text{konst.}$ ) kommt man zunächst noch im stabilen Bereich in Zustände immer geringerer Dämpfung, während die Eigenfrequenzen des Fahrzeugs sich kaum ändern. Beim Überschreiten der Stabilitätsgrenze ist, wie vorher die Dämpfung, danach die Anfachung nur sehr gering, und es wachsen deswegen die Amplituden einer durch eine kleine Störung verursachten Schiebe- und Gierschwingung nur langsam an. Die Stabilitätsgrenze in Abb. 8 wird von der waagrechten Geraden  $n = \text{konst.}$  in einem spitzen Winkel geschnitten, so daß mit wachsendem  $v$  ein allmählicher Übergang aus dem stabilen in den instabilen Bereich stattfindet. Ein aufmerksamer Lenker sollte die Gefahr rechtzeitig erkennen, bevor er einer größeren Störung begegnet, wenn z. B. das Fahrzeug von einem seitlichen Windstoß getroffen wird.

Das gewählte Ersatzsystem für das Fahrzeug berücksichtigt zwar den Einfluß des Schräglaufes der Luftreifen bei seitlicher Belastung und die Lenkbarkeit des Fahrzeugs, aber nicht den Einfluß der Federung. Eine folgende Arbeit soll diese Lücke ausfüllen.

(Eingegangen am 16. Mai 1958.)



## Der durchlaufende Balken auf äquidistanten elastischen Stützen\*

Von V. Bogunović

**1. Einleitung.** In der vorliegenden Arbeit wird das Biegeungsproblem eines durchlaufenden Balkens auf elastisch senkbaren Stützen untersucht. Dabei wird angenommen, daß die beiden Endstützen starr und sämtliche Zwischenstützen elastisch, gleich steif und in gleichen Abständen angeordnet sind. Der Durchlaufbalken wird entweder durch Einzellasten, die über elastische Stützen wirken, oder durch verteilte Last beansprucht. Die Lösung dieses Problems, d. h. die Ermittlung der Stützkkräfte und Stützmomente, wird in Form eines trigonometrischen Polynoms angegeben, dessen Gliederzahl mit der Anzahl der elastischen Zwischenstützen übereinstimmt.

### 2. Elastisch gestützter Durchlaufträger durch Einzelkräfte belastet (Abb. 2).

a) Durchbiegungen und Biegemomente an den äquidistanten Stellen eines frei aufliegenden Balkens. Wir betrachten einen frei gelagerten Balken von der Stützweite  $l$ , der durch  $m - 1$  äquidistante irgendwelche Einzellasten beansprucht wird (Abb. 1). Bezeichnen  $P_i$ ,  $u_i$  und  $M_i$  die Einzellast, die Durchbiegung und das Biegemoment an einer Trägerstelle  $i$  im Abstand  $i l/m$  von der linken Stütze, so lassen sich<sup>1</sup> mit der Abkürzung

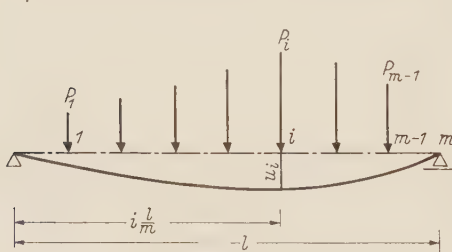


Abb. 1. Balken auf zwei Stützen mit Einzellasten.

$$f_B = \frac{l^3}{48 E I}$$

die Differenzengleichungen für die Durchbiegungen  $u_i$  und Biegemomente  $M_i$

$$\delta^2 u_i = -\frac{8}{m^2} \frac{f_B}{l} (M_{i+1} + 4 M_i + M_{i-1}), \quad (i = 1, 2, \dots, m-1) \quad (1)$$

$$\delta^2 M_i = -\frac{l}{m} P_i, \quad (2)$$

mit den entsprechenden Randbedingungen

$$u_0 = u_m = 0, \quad M_0 = M_m = 0,$$

anschreiben, wobei  $I$  das unveränderlich vorausgesetzte Trägheitsmoment des Balkenquerschnitts und  $E$  den Elastizitätsmodul des Materials bedeuten.

Dabei bezeichnet der Differenzenoperator  $\delta$  üblicherweise die zentrale Differenz

$$\delta f_i = f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}},$$

und entsprechende höhere Differenzen

$$\delta^2 f_i = f_{i+1} - 2 f_i + f_{i-1},$$

$$\delta^4 f_i = \delta^2(\delta^2 f_i),$$

wo  $f_i$  den Funktionswert  $f_i = f(x_i)$  einer Funktion  $f(x)$  an äquidistanten Stellen  $x_i = i l/m$  bedeutet.

Aus (1) und (2) läßt sich leicht die Differenzengleichung vierter Ordnung

$$\delta^4 u_i = \frac{8}{m^3} f_B (P_{i+1} + 4 P_i + P_{i-1}) \quad (i = 1, 2, \dots, m-1) \quad (3)$$

ableiten.

Die Werte von äquidistanten Einzellasten  $P_i$  können, wie bekannt<sup>2</sup>, in Form eines trigonometrischen Polynoms

$$P_i = \sum_{k=1}^{m-1} c_k \sin i k \lambda \quad (\lambda = \pi/m) \quad (4)$$

dargestellt werden, wobei die Koeffizienten durch die Summe

$$c_k = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m-1} P_i \sin i k \lambda \quad (5)$$

gegeben sind.

\* Herrn Prof. J. M. Klitchieff in Beograd zum 70. Geburtstag gewidmet.

<sup>1</sup> F. Stüssi, Vorlesungen über Baustatik, Bd. I, S. 55 u. 238. Basel 1946.

<sup>2</sup> R. Courant, Vorlesungen über Differential- und Integralrechnung, Bd. I, S. 360. Berlin 1930.



Auf ähnliche Weise können auch die Werte  $M_i$  der Biegemomente an den äquidistanten Trägerstellen durch das trigonometrische Polynom

$$M_i = \sum_{k=1}^{m-1} b_k \sin i k \lambda, \quad (6)$$

dargestellt werden, wo die Koeffizienten  $b_k$  vorläufig noch unbekannt sind.

Wenn wir die Ausdrücke (6) und (4) in die Differenzengleichung (2) einsetzen und beachten, daß

$$\delta^2 f_i = -2(1 - \cos k \lambda) \sin i k \lambda \quad (7)$$

ist, wobei wir die Bezeichnung

$$f_i = \sin i k \lambda$$

eingeführen, so erhalten wir ein System von  $m - 1$  linearen Gleichungen für die  $m - 1$  Unbekannten  $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$ :

$$2 \sum_{k=1}^{m-1} b_k (1 - \cos k \lambda) \sin i k \lambda = \frac{l}{m} \sum_{k=1}^{m-1} c_k \sin i k \lambda \quad (i = 1, 2, \dots, m-1). \quad (8)$$

Dieses Gleichungssystem kann, wie bekannt, sehr leicht explizit aufgelöst werden. Wir wählen irgend eine ganze Zahl  $p$  unter den Zahlen  $1, 2, \dots, m - 1$ , multiplizieren die erste Gleichung mit  $\sin 1 p \lambda$ , die zweite mit  $\sin 2 p \lambda, \dots$ , die letzte mit  $\sin (m - 1) p \lambda$ , addieren sodann sämtliche Gleichungen und ordnen die so entstandene Gleichung nach den Koeffizienten  $b_k$  bzw.  $c_k$ . Unter Benützung der bekannten Formel

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sin i k \lambda \sin i p \lambda = \begin{cases} m/2 & \text{für } k = p, \\ 0 & \text{für } k \neq p \end{cases} \quad (9)$$

ergibt sich, daß alle Beiwerte von  $b_k$  bzw.  $c_k$  für  $k \neq p$  verschwinden bis auf  $k = p$ . Auf diese Weise erhalten wir

$$b_k = \frac{l}{2m} (1 - \cos k \lambda)^{-1} c_k. \quad (10)$$

Setzt man in (6) den Ausdruck (10) für  $b_k$  ein, so erhält man die Werte  $M_i$  der Biegemomente an den äquidistanten Stellen eines durch Einzellasten  $P_i$  beanspruchten Balkens

$$M_i = \frac{l}{2m} \sum_{k=1}^{m-1} (1 - \cos k \lambda)^{-1} c_k \sin i k \lambda. \quad (11)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Verschiebungen  $u_i$  an den äquidistanten Trägerstellen durch das trigonometrische Polynom

$$u_i = \sum_{k=1}^{m-1} a_k \sin i k \lambda, \quad (12)$$

darstellen, wo die Koeffizienten  $a_k$  vorläufig unbestimmt sind. Wenn wir die Ausdrücke (12) und (4) in die Differenzengleichung (3) einsetzen und beachten, daß

$$\delta^4 f_i = 4(1 - \cos k \lambda)^2 \sin i k \lambda, \quad f_{i+1} + 4f_i + f_{i-1} = 2(2 + \cos k \lambda) \sin i k \lambda \quad (13)$$

ist, so erhalten wir ein Gleichungssystem von  $m - 1$  linearen Gleichungen für die  $m - 1$  Unbekannten  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$

$$4 \sum_{k=1}^{m-1} a_k (1 - \cos k \lambda)^2 \sin i k \lambda = \frac{16}{m^3} f_B \sum_{k=1}^{m-1} c_k (2 + \cos k \lambda) \sin i k \lambda \quad (i = 1, 2, \dots, m-1).$$

Dieses Gleichungssystem kann auf dieselbe Weise wie das System (8) explizit gelöst werden; so ergibt sich

$$a_k = \frac{4}{m^3} f_B \frac{2 + \cos k \lambda}{(1 - \cos k \lambda)^2} c_k. \quad (14)$$

Setzt man in (12) den Ausdruck (14) für  $a_k$  ein, so erhält man die Verschiebungen  $u_i$  an den äquidistanten Stellen eines durch Einzellasten  $P_i$  beanspruchten Trägers

$$u_i = \frac{4}{m^3} f_B \sum_{k=1}^{m-1} \frac{2 + \cos k \lambda}{(1 - \cos k \lambda)^2} c_k \sin i k \lambda. \quad (15)$$

b) Balken auf äquidistanten elastischen Stützen. Es sei ein an beiden Enden senkrecht unverschieblich gelagerter Balken von der Länge  $l$  gegeben, der in den äquidistanten Punkten  $1, 2, \dots, m-1$  elastisch gelagert und durch die Einzellasten  $P_i$  beansprucht ist (Abb. 2), wobei linearer Zusammenhang zwischen Verschiebung  $u_i$  und Stützkraft  $R_i$  vorausgesetzt sei, derart, daß

$$u_i = f_s R_i \quad (16)$$

ist und mit  $f_s$  die Verschiebung der elastischen Stütze infolge  $R_i = 1$  bezeichnet wird.

Zur Bildung eines statisch bestimmten Systems beseitigen wir die  $m-1$  mittleren elastischen Stützen. In diesen Punkten  $1$  bis  $m-1$  bringen wir die statisch unbestimmten Stützenwiderstände  $R_i$  als Belastung an, die mit den vorgegebenen Einzellasten  $P_i$  die resultierenden Einzelkräfte

$$Q_i = P_i - R_i \quad (17)$$

ergeben. Die vorgegebenen Größen der Einzellasten  $P_i$  können wir in Form (4) eines trigonometrischen Polynoms darstellen, dessen Koeffizienten durch (5) bestimmt sind. Auf ähnliche Weise lassen sich auch die Stützenwiderstände  $R_i$  in Form

$$R_i = \sum_{k=1}^{m-1} c_{k1} \sin i k \lambda \quad (18)$$

ausdrücken, wo die Koeffizienten  $c_{k1}$  vorläufig noch unbekannt sind. Setzt man in (16) den Ausdruck (18) für  $R_i$  ein, so erhält man

$$u_i = f_s \sum_{k=1}^{m-1} c_{k1} \sin i k \lambda. \quad (19)$$

Nach Einsetzen der Ausdrücke (4) und (18) in (17) erhält man

$$Q_i = \sum_{k=1}^{m-1} (c_k - c_{k1}) \sin i k \lambda. \quad (20)$$

Setzt man nun die Ausdrücke (19) und (20) in die Differenzgleichung (3) ein, wobei an Stelle von  $P_i$  der Ausdruck (20) für  $Q_i$  einzusetzen ist, so erhält man ein System von  $m-1$  linearen Gleichungen mit  $m-1$  Unbekannten  $c_{k1}$

$$4 f_s \sum_{k=1}^{m-1} c_{k1} (1 - \cos k \lambda)^2 \sin i k \lambda = \frac{16}{m^3} f_B \sum_{k=1}^{m-1} (c_k - c_{k1}) (2 + \cos k \lambda) \sin i k \lambda \quad (i = 1, 2, \dots, m-1)$$

Löst man dieses Gleichungssystem auf dieselbe Weise wie das System (8), so erhält man

$$c_{k1} = \left[ 1 + \frac{m^3 f_s (1 - \cos k \lambda)^2}{4 f_B (2 + \cos k \lambda)} \right]^{-1} c_k. \quad (21)$$

Setzt man in (18) den Ausdruck (21) für  $c_{k1}$  ein, so ergibt sich

$$R_i = \sum_{k=1}^{m-1} \left[ 1 + \frac{m^3 f_s (1 - \cos k \lambda)^2}{4 f_B (2 + \cos k \lambda)} \right]^{-1} c_k \sin i k \lambda. \quad (22)$$

Nun sind die resultierenden Einzelkräfte  $Q_i$  durch die Gleichungen (20), (5) und (21) bestimmt, und es ist leicht, die Stützmomente  $M_i$  mit Hilfe (11) zu ermitteln, wobei an Stelle von  $c_k$  die Differenz  $c_k - c_{k1}$  eingesetzt werden soll. Auf diese Weise ergibt sich

$$M_i = \frac{l}{2m} \sum_{k=1}^{m-1} \left[ 1 - \cos k \lambda + \frac{4 f_B (2 + \cos k \lambda)}{m^3 f_s (1 - \cos k \lambda)} \right]^{-1} c_k \sin i k \lambda. \quad (23)$$

### c) Beispiele.

1. Eine Einzellast über eine elastische Stütze. Mit Rücksicht auf (9) ist leicht zu erkennen, daß der Ausdruck

$$P_i = \frac{2}{m} P_p \sum_{k=1}^{m-1} \sin k p \lambda \sin k i \lambda \quad (24)$$

für alle Trägerstellen  $i \neq p$  verschwindet und nur an der Stelle  $i = p$  den Wert  $P_p$  annimmt und somit die vorgegebene Belastung (Abb. 3) in den diskreten Punkten 1, 2, ...,  $m-1$  darstellt. Dementsprechend können wir schreiben

$$P_i = \sum_{k=1}^{m-1} c_k \sin i k \lambda,$$

wo

$$c_k = \frac{2}{m} P_p \sin k p \lambda \quad (25)$$

ist. Setzt man (25) in die Gleichungen (22) und (23) ein, so folgt

$$R_{ip} = \frac{2}{m} P_p \sum_{k=1}^{m-1} \left[ 1 + \frac{m^3 f_s (1 - \cos k \lambda)^2}{4 f_B (2 + \cos k \lambda)} \right]^{-1} \sin p k \lambda \sin i k \lambda,$$

$$M_{ip} = \frac{P_p l}{m^2} \sum_{k=1}^{m-1} \left[ 1 - \cos k \lambda + \frac{4 f_B (2 + \cos k \lambda)}{m^3 f_s (1 - \cos k \lambda)} \right]^{-1} \sin k p \lambda \sin i k \lambda,$$

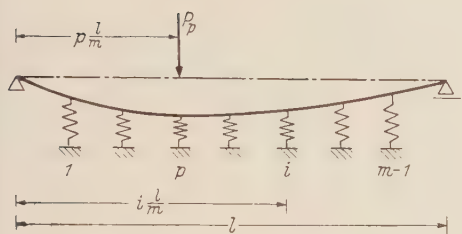


Abb. 3. Elastisch gestützter Durchlaufträger mit Einzellast.

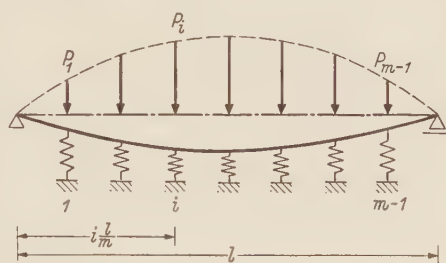


Abb. 4. Sinusförmige Verteilung der Einzellasten.

wobei die Indexbezeichnung so durchgeführt ist, daß der erste Index den Ort, der zweite die Ursache angibt.

2. Gleiche Einzellasten an sämtlichen Auflagerpunkten der elastischen Zwischenstützen. Unter Berücksichtigung, daß

$$P_1 = P_2 = \dots = P_{m-1} = P$$

ist, folgt mit Hilfe der Formel

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sin i k \lambda = \sin^2 \frac{k \pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{k \lambda}{2}$$

aus (5)

$$c_k = \frac{2 P}{m} \sin^2 \frac{k \pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{k \lambda}{2}. \quad (26)$$

Setzt man (26) in die Gleichungen (22) und (23) ein, so erhält man

$$R_i = \frac{2}{m} P \sum_{k=1}^{m-1} \left[ 1 + \frac{m^3 f_s (1 - \cos k \lambda)^2}{4 f_B (2 + \cos k \lambda)} \right]^{-1} \operatorname{ctg} \frac{k \lambda}{2} \sin^2 \frac{k \pi}{2} \sin i k \lambda,$$

$$M_i = \frac{P l}{m^2} \sum_{k=1}^{m-1} \left[ (1 - \cos k \lambda)^2 + \frac{4 f_B}{m^3 f_s} (2 + \cos k \lambda) \right]^{-1} \sin k \lambda \sin^2 \frac{k \pi}{2} \sin i k \lambda.$$

3. Sinusförmige Verteilung der Einzellasten. Die Größe  $P_i$  der Einzellast an der Trägerstelle  $i$  (Abb. 4) sei durch den Ausdruck

$$P_i = P \sin i n \lambda \quad (27)$$

gegeben, wo  $n$  irgendeine nicht durch  $m$  teilbare ganze Zahl bedeutet. Die vorgegebene Zahl  $n$  bestimmt eindeutig eine ganze Zahl  $j$  ( $> 0$ ) durch die Bedingung

$$2 j m < n < 2 (j + 1) m.$$

Mit einer so bestimmten Zahl  $j$  dürfen wir

$$n = 2 j m + \nu \quad \text{für} \quad n < (2 j + 1) m, \quad (a)$$

$$n = 2 (j + 1) m - \nu \quad \text{für} \quad n > (2 j + 1) m, \quad (b)$$



schreiben, wobei  $\nu$  eine ganze Zahl ( $0 < \nu \leq m - 1$ ) ist. Mit obigen Werten von  $n$  kann man (27) in der Form

$$P_i = \pm P \sin i \nu \lambda \quad (28)$$

schreiben; hier gilt positives Vorzeichen für den Fall (a) und negatives für (b). Aus den Gleichungen (22) und (23) und mit Rücksicht auf (28) und (4) erhält man

$$R_i = \pm P \left[ 1 + \frac{m^3}{4} \frac{f_s}{f_B} \frac{(1 - \cos \nu \lambda)^2}{2 + \cos \nu \lambda} \right]^{-1} \sin i \nu \lambda,$$

$$M_i = \pm \frac{Pl}{2m} \left[ 1 - \cos \nu \lambda + \frac{4}{m^3} \frac{f_B}{f_s} \frac{2 + \cos \nu \lambda}{1 - \cos \nu \lambda} \right]^{-1} \sin i \nu \lambda.$$

**3. Balken auf elastischen Stützen mit kontinuierlicher Belastung.** a) Durchbiegungen und Biegemomente an den äquidistanten Stellen eines frei gestützten Balkens. — Die

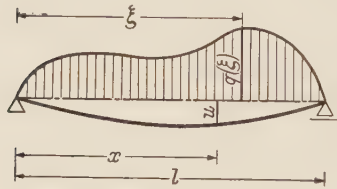


Abb. 5. Balken auf zwei Stützen mit kontinuierlicher Belastung.

Durchbiegung  $u$  eines freiaufliegenden Balkens von der Länge  $l$  der im Abstände  $\xi$  vom linken Auflager eine Einzellast  $Q$  trägt kann bekannterweise durch die trigonometrische Reihe

$$u = \frac{96}{\pi^4} Q f_B \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \sin \frac{k \pi \xi}{l} \sin \frac{k \pi x}{l} \quad (29)$$

dargestellt werden. Aus dieser Grundlösung ergibt sich sofort die Lösung für jede beliebig verteilte Belastung, deren Intensität  $q$  eine Funktion von  $\xi$  ist (Abb. 5). Dafür muß man in den Ausdruck

(29)  $Q = q d\xi$  einsetzen und über die belastete Balkenstrecke integrieren. Auf diese Weise erhält man

$$u = \frac{96}{\pi^4} f_B \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k \pi x}{l} \quad (30)$$

mit Abkürzung

$$A_k = \frac{1}{k^4} \int_0^l q(\xi) \sin \frac{k \pi \xi}{l} d\xi. \quad (31)$$

Wenn wir

$$x = x_i = \frac{i l}{m} \quad (m = 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, m - 1)$$

in die Reihe (30) einsetzen, erhalten wir die Durchbiegung an den äquidistanten Trägerstellen

$$u_i = \frac{96}{\pi^4} f_B \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin i k \lambda. \quad (32)$$

Die Durchbiegungen  $u_i$  an den äquidistanten Trägerstellen lassen sich in Form eines trigonometrischen Polynoms

$$u_i = \frac{96}{\pi^4} f_B \sum_{k=1}^{m-1} a_k \sin i k \lambda \quad (33)$$

darstellen, wo die Koeffizienten  $a_k$  vorläufig noch unbestimmt sind. Wenn wir die Ausdrücke (32) und (33) gleichsetzen

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin i k \lambda = \sum_{k=1}^{m-1} a_k \sin i k \lambda, \quad (i = 1, 2, \dots, m - 1), \quad (34)$$

so erhalten wir ein System von  $m - 1$  linearen Gleichungen mit  $m - 1$  Unbekannten  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$ . Dieses Gleichungssystem kann auf dieselbe Weise wie das System (8) explizit aufgelöst werden. Wir wählen irgend eine ganze Zahl  $p$  unter den Zahlen  $1, 2, \dots, m - 1$ , multiplizieren die erste Gleichung mit  $\sin 1 p \lambda$ , die zweite mit  $\sin 2 p \lambda$ , ..., die letzte mit  $\sin (m - 1) p \lambda$ , addieren sodann sämtliche Gleichungen und ordnen die so entstandene Gleichung nach den Koeffizienten  $A_k$  bzw.  $a_k$ . Unter Benutzung der bekannten Formel

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sin i k \lambda \sin i p \lambda = \begin{cases} m/2 & \text{für } k = 2 j m + p, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ -m/2 & \text{für } k = 2 j m - p, \quad j = 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{für alle übrigen Werte von } k, \end{cases}$$

und mit Hilfe der Beziehung

$$\sin(2jm \pm i)k\lambda = \pm \sin ik\lambda \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

ergibt sich sodann, daß sämtliche Beiwerte von  $A_k$  bzw.  $a_k$  für  $k \neq 2jm \pm p$  bzw.  $k \neq p$  verschwinden bis auf  $k = 2jm \pm p$  bzw.  $k = p$ . Auf diese Weise erhalten wir

$$a_k = \sum_{j=0}^{\infty} A_{2jm+k} - \sum_{j=1}^{\infty} A_{2jm-k}. \quad (35)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten  $A_k$  die Gleichung

$$A_{2jm \pm k} = \frac{+}{(-1)^{r+1}} \frac{k^r}{(2jm \pm k)^r} A_k \quad (36)$$

erfüllen, wo  $j = 1, 2, \dots$ ;  $k = 1, 2, \dots, m-1$ ;  $r = 4, 5, \dots$  sind, können wir dann den Ausdruck (35) in der Form

$$a_k = \varphi_{kr} A_k \quad (37)$$

schreiben, wobei die Abkürzung

$$\varphi_{kr} = k^r \sum_{j=-\infty}^{\infty} (2jm + k)^{-r} \quad (38)$$

eingeführt ist. Die Reihe (38) läßt sich geschlossen auswerten, wie in Ziff. 4 gezeigt wird. Indem man (37) in (33) einsetzt, erhält man schließlich den Ausdruck für die Durchbiegung

$$u_i = \frac{96}{\pi^4} f_B \sum_{k=1}^{m-1} \varphi_{kr} A_k \sin ik\lambda. \quad (39)$$

Differentiiert man die Reihe (29) zweimal nach  $x$ , so erhält man den Ausdruck für das Biegemoment

$$M = -EI u'' = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin \frac{k\pi x}{l},$$

oder an den äquidistanten Punkten

$$M_i = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin ik\lambda, \quad (40)$$

wo

$$B_k = k^2 A_k \quad (41)$$

ist. Mit Rücksicht auf (41) und (36) erhält man

$$B_{2jm \pm k} = \frac{+}{(-1)^{r+1}} \frac{k^{r-2}}{(2jm \pm k)^{r-2}} B_k. \quad (42)$$

Auf ähnliche Weise läßt sich auch das Biegemoment  $M_i$  an den äquidistanten Trägerstellen in Form eines trigonometrischen Polynoms

$$M_i = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m-1} \varphi_{k,r-2} B_k \sin ik\lambda$$

ausdrücken. Mit Rücksicht auf (41) ergibt sich daraus

$$M_i = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{m-1} \varphi_{k,r-2} k^2 A_k \sin ik\lambda. \quad (43)$$

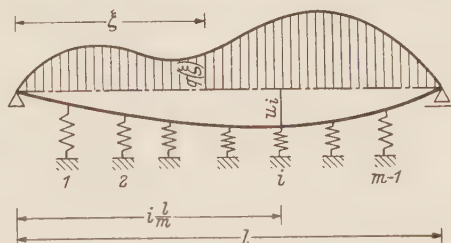


Abb. 6. Elastisch gestützter Durchlaufträger mit kontinuierlicher Belastung.

b) Balken auf äquidistanten elastischen Stützen. Es sei ein an beiden Enden senkrecht unverschieblich gelagerter Balken von der Länge  $l$  gegeben, der in den äquidistanten Punkten  $1, 2, \dots, i, \dots, m-1$  elastisch gelagert und durch eine kontinuierliche Belastung von der Intensität  $q(\xi)$  beansprucht wird (Abb. 6). Wenn wir mit  $u_i$  die Verschiebung der elastischen Stütze  $i$ , mit  $R_i$  den Stützdruck und mit  $f_s$  die Verschiebung dieser Stütze infolge  $R_i = 1$  bezeichnen, dann gilt die Beziehung (16). Die unbekannten Stützedrücke  $R_i$  lassen sich in Form eines trigonometrischen Polynoms (18) darstellen, dessen Koeffizienten vorläufig unbestimmt sind. Aus (16) und (18) erhält man die Verschiebung  $u_i$  (19).

Die Durchbiegung  $u_{i0}$  eines Balkens auf zwei Stützen an der Trägerstelle  $i$ , d. h. im Abstand  $i l/m$  vom linken Auflager, ist infolge einer kontinuierlichen Belastung von der Intensität  $q(\xi)$  durch das Polynom (39) dargestellt. Die Durchbiegung  $u_{i1}$  eines Balkens auf zwei Stützen an derselben Trägerstelle  $i$  ist infolge von vorläufig noch unbekannten äquidistanten Stützkraften  $R_i$  durch das Polynom (15) ausgedrückt, wobei der Koeffizient  $c_{k1}$  an Stelle von  $c_k$  zu setzen ist.

Diese Verschiebungen müssen offensichtlich das Gleichungssystem

$$u_{i0} - u_{i1} = u_i \quad (i = 1, 2, \dots, m-1) \quad (44)$$

erfüllen.

Setzt man nun die Ausdrücke (19), (15) und (39) für die Verschiebungen in (44) ein, so ergibt sich ein lineares Gleichungssystem von  $m-1$  Gleichungen für die  $m-1$  Unbekannten  $c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m-1,1}$

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left[ f_s + \frac{4}{m^3} f_B \frac{2 + \cos k \lambda}{(1 - \cos k \lambda)^2} \right] c_{k1} \sin i k \lambda = \frac{96}{\pi^4} f_B \sum_{k=1}^{m-1} \varphi_{kr} A_k \sin i k \lambda, \quad (i = 1, 2, \dots, m-1) \quad (45)$$

Löst man dieses Gleichungssystem auf dieselbe Weise wie das System (8), so erhält man

$$c_{k1} = \frac{24 m^3}{\pi^4} \left[ \frac{m^3}{4} \frac{f_s}{f_B} + \frac{2 + \cos k \lambda}{(1 - \cos k \lambda)^2} \right]^{-1} \varphi_{kr} A_k. \quad (46)$$

Setzt man in (18) den Ausdruck (46) für  $c_{k1}$  ein, so erhält man

$$R_i = \frac{24 m^3}{\pi^4} \sum_{k=1}^{m-1} \left[ \frac{m^3}{4} \frac{f_s}{f_B} + \frac{2 + \cos k \lambda}{(1 - \cos k \lambda)^2} \right]^{-1} \varphi_{kr} A_k \sin i k \lambda. \quad (47)$$

Ist  $M_{i1}$  das Moment an der Trägerstelle  $i$  infolge der  $m-1$  Stützkraften  $R_i$ , und setzen wir für  $c_k$  den Ausdruck (46) in (11) ein, so ergibt sich

$$M_{i1} = \frac{12 m^2}{\pi^4} l \sum_{k=1}^{m-1} \left[ \frac{m^3}{4} \frac{f_s}{f_B} (1 - \cos k \lambda) + \frac{2 + \cos k \lambda}{1 - \cos k \lambda} \right]^{-1} \varphi_{kr} A_k \sin i k \lambda. \quad (48)$$

Ist  $M_{i0}$  das Moment an der Stelle  $i$  infolge der gegebenen Belastung  $q(\xi)$  (43), so erhält man dann das endgültige Stützmoment durch Superposition

$$M_i = M_{i0} - M_{i1} = \frac{12 m^2}{\pi^4} l \sum_{k=1}^{m-1} \left\{ \frac{\pi^2}{6 m^2} \varphi_{k,r-2}^0 - \left[ \frac{m^3}{4} \frac{f_s}{f_B} (1 - \cos k \lambda) + \frac{2 + \cos k \lambda}{1 - \cos k \lambda} \right]^{-1} \varphi_{kr}^0 \right\} k^r A_k \sin i k \lambda, \quad (49)$$

wobei zur Abkürzung

$$\varphi_{kr}^0 = \varphi_{kr} k^{-r} \quad (50)$$

gesetzt ist.

c) Der durchlaufende Balken auf äquidistanten starren Stützen. Setzt man  $f_s = 0$  in (47) und (49) ein, so ergeben sich die Ausdrücke für die inneren Auflagerkräfte  $R_i$  und die Stützmomente  $M_i$  eines durchlaufenden Balkens auf äquidistanten starren Stützen

$$R_i = \frac{24 m^3}{\pi^4} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{(1 - \cos k \lambda)^2}{2 + \cos k \lambda} \varphi_{kr} A_k \sin i k \lambda, \quad (51)$$

$$M_i = \frac{12 m^2}{\pi^4} l \sum_{k=1}^{m-1} \left[ \frac{\pi^2}{6 m^2} \varphi_{k,r-2}^0 - \frac{1 - \cos k \lambda}{2 + \cos k \lambda} \varphi_{kr}^0 \right] k^r A_k \sin i k \lambda. \quad (52)$$

d) Die Belastungsfunktionen  $q(\xi)$ , welche die Bedingung (36) erfüllen. Für einige in der technischen Anwendung sehr oft vorkommende Belastungsfälle, ist die Bedingung (36) erfüllt. Nehmen wir, z. B. an, daß die Belastungsfunktion in der Form eines Polynoms

$$q(\xi) = q_0 P_n(\xi) = q_0 (a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots + a_n \xi^n) \quad (53)$$

gegeben sei. Nach Einsetzen des Ausdruckes (53) in (31), erhält man durch partielle Integration

$$A_k = \frac{q_0 l}{\pi k^5} \left\{ [P_n(0) - P_n(l) \cos k \pi] - \left( \frac{l}{k \pi} \right)^2 [P_n''(0) - P_n''(l) \cos k \pi] + \dots \right\}. \quad (54)$$

Mit Rücksicht auf (54) ergibt sich, daß für  $n < 2$ , d. h. für die gleichmäßige ( $n = 0$ ) und für die hydrostatische Belastung ( $n = 1$ ) die Bedingung (36) offensichtlich erfüllt ist. Auch wenn



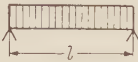
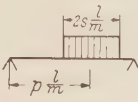

$n \geq 2$  ist — solche Belastungsfälle kommen in der technischen Praxis sehr selten vor — kann die Bedingung (36) erfüllt werden, z. B., wenn die Koeffizienten des Polynoms die Gleichungen

$$P_n^{(p)}(0) = 0, \quad P_n^{(p)}(l) = 0$$

für

$$p = 0, 2, 4, \dots, \mu - 2, \quad \mu = n - \frac{1}{2} [1 - (-1)^n]$$

erfüllen.

Belastung $q(\xi)$	$A_k$
<b>a</b>  $q_0$	$\frac{2q_0 l}{\pi} \frac{1}{k^3} \sin^2 \frac{k\pi}{2}$
<b>b</b>  $q_0$	$\frac{2q_0 l}{\pi} \frac{1}{k^3} \sin k p \lambda \sin k s \lambda$
<b>c</b>  $q_0 \frac{\xi}{l}$	$\frac{q_0 l}{\pi} \frac{1}{k^3} \cos (k+1) \pi$

Für eine Streckenlast  $q_0$ , gemäß Tabelle (Abb. b), wo  $p$  und  $s$  ganze Zahlen sind, ergibt sich aus (31)

$$A_k = \frac{2 q_0 l}{\pi} \frac{1}{k^3} \sin k p \lambda \sin k s \lambda.$$

Dieser Koeffizient erfüllt offensichtlich die Bedingung (36). In Tabelle sind einige in der technischen Praxis oft vorkommende Belastungsfälle angegeben, deren Koeffizienten  $A_k$  die Bedingung (36) erfüllen.

#### e) Beispiele.

1. Der Durchlaufträger auf elastischen Stützen mit den in Tabelle dargestellten Belastungen. Setzt man in (47) und (49) den Ausdruck für  $\varphi_{kr}^0$  ( $r = 5$ ) (s. Ziff. 4) ein, so lassen sich mit der Abkürzung

$$\beta = \frac{m^3}{4} \frac{f_s}{f_B}$$

die Ausdrücke für die Stützdrücke  $R_i$  und die Biegemomente  $M_i$  in der Form

$$R_i = \frac{\pi}{2 m^2} \sum_{k=1}^{m-1} k^5 A_k \frac{5 + \cos k \lambda}{2 + \cos k \lambda + \beta (1 - \cos k \lambda)^2} \operatorname{ctg} \frac{k \lambda}{2} \sin i k \lambda,$$

$$M_i = \frac{\pi}{4 m^3} l \sum_{k=1}^{m-1} k^5 A_k \frac{2 \beta (1 - \cos k \lambda) - 1}{2 + \cos k \lambda + \beta (1 - \cos k \lambda)^2} \operatorname{ctg} \frac{k \lambda}{2} \sin i k \lambda$$

schreiben, wobei die Koeffizienten  $A_k$  in Tabelle angegeben sind. Setzt man  $\beta = 0$  in obige Ausdrücke ein, so erhält man die Stützkräfte und Stützmomente eines durchlaufenden Trägers auf starren Stützen

$$R_i = \frac{\pi}{2 m^2} \sum_{k=1}^{m-1} k^5 A_k \frac{5 + \cos k \lambda}{2 + \cos k \lambda} \operatorname{ctg} \frac{k \lambda}{2} \sin i k \lambda,$$

$$M_i = - \frac{\pi}{4 m^3} l \sum_{k=1}^{m-1} k^5 A_k \frac{\operatorname{ctg} \frac{k \lambda}{2}}{2 + \cos k \lambda} \sin i k \lambda.$$

2. Sinusförmig verteilte Belastung (Abb. 7). Für den betrachteten Fall ist die Belastungsfunktion  $q(\xi)$  durch den Ausdruck

$$q = q_0 \sin \frac{n \pi \xi}{l}$$

gegeben, wobei  $n$  irgendeine nicht durch  $m$  teilbare ganze Zahl bedeutet. Der Ausdruck für die Verschiebung  $u_{i0}$  eines Balkens auf zwei Stützen lautet infolge dieser Belastung bekannterweise

$$u_{i0} = \frac{48}{n^4 \pi^4} f_B q_0 l \sin i n \lambda.$$

Wenn wir das gleiche Verfahren wie im Beispiel 3 von Ziff. 2 anwenden, ergibt sich

$$u_{i0} = \pm \frac{48}{n^4 \pi^4} f_B q_0 l \sin i v \lambda.$$

Setzt man diesen Ausdruck in (44) ein, so erhält man nach den im Ziff. 3b) beschriebenen Verfahren die Ausdrücke für die Stützkkräfte  $R_i$  und Biegemomente  $M_i$

$$R_i = \pm \frac{12 m^3}{n^4 \pi^4} q_0 l \left[ \beta + \frac{2 + \cos v \lambda}{(1 - \cos v \lambda)^2} \right]^{-1} \sin i v \lambda,$$

$$M_i = \frac{6 m^2}{n^4 \pi^4} q_0 l^2 \left\{ \frac{n^2 \pi^2}{6 m^2} \mp \left[ \beta (1 - \cos v \lambda) + \frac{2 + \cos v \lambda}{1 - \cos v \lambda} \right]^{-1} \right\} \sin i v \lambda,$$

wobei positives Vorzeichen für den Fall (a) und negatives für (b) gilt, [s. Beispiel 3 von Ziff. 2].

**4. Geschlossene Auswertung der Reihensumme<sup>1</sup>.** Durch gliederweise  $(r-1)$ -malige Differentiation der bekannten Reihe

$$\operatorname{ctg} x = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (j\pi + x)^{-1}$$

ergibt sich

$$(\operatorname{ctg} x)^{(r-1)} = (-1)^{r-1} (r-1)! \sum_{j=-\infty}^{\infty} (j\pi + x)^{-r}. \quad (55)$$

Setzt man  $x = k\pi/2m$  in (55) ein, so erhält man nach einigen Umformungen, folgende, hier bis  $r = 5$  angeführte, geschlossene Ausdrücke

$$\varphi_{k1}^0 = \frac{\lambda}{2} \operatorname{ctg} \frac{k\lambda}{2},$$

$$\varphi_{k4}^0 = \frac{4}{3} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^4 (2 + \cos k\lambda) (1 - \cos k\lambda)^{-2},$$

$$\varphi_{k2}^0 = 2 \left( \frac{\lambda}{2} \right)^2 (1 - \cos k\lambda)^{-1},$$

$$\varphi_{k5}^0 = \frac{2}{3} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^5 (5 + \cos k\lambda) (1 - \cos k\lambda)^{-2} \operatorname{ctg} \frac{k\lambda}{2}$$

$$\varphi_{k3}^0 = 2 \left( \frac{\lambda}{2} \right)^3 (1 - \cos k\lambda)^{-1} \operatorname{ctg} \frac{k\lambda}{2},$$

für die Reihe

$$\varphi_{kr}^0 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (2jm + k)^{-r}.$$

(Eingegangen am 16. Mai 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. V. Bogunović, Beograd (Jugoslawien), Palmotićeve 31.

<sup>1</sup> J. M. Klüchierff, The Aeronautical Quarterly, 2, 1950, S. 157.

# Torsionseigenfrequenzen von Kreisscheiben veränderlicher Dicke

Von H. Wittmeyer

**1. Einleitung.** Die Ermittlung der Torsionseigenfrequenzen von Kreisscheiben hat Bedeutung bei dem Entwurf von Dampfturbinenscheiben, wie *Grammel*<sup>1</sup> ausführlich dargestellt hat. Dort werden auch Lösungsmöglichkeiten für die zugehörige Differentialgleichung angegeben.

Nun kann die Differentialgleichung für die Torsionsschwingungen einer Kreisscheibe ohne Knotendurchmesser auch als Differentialgleichung für die Torsionsschwingungen eines Stabes aufgefaßt werden, wie weiter unten gezeigt wird. Daher liegt es nahe, die einfachen Formeln, die der Verfasser<sup>2</sup> in einer früheren Arbeit zur Berechnung der Torsionseigenfrequenzen eines Stabes hergeleitet hat, auf die Berechnung der Torsionseigenfrequenzen einer Kreisscheibe zu übertragen. Die auf diese Weise erhaltene später angeführte Grundformel ermöglicht in einfacher Weise die Berechnung der ersten drei Torsionseigenfrequenzen der Scheibe, falls sie an ihrem Innenrande starr eingespannt ist und keine träge Masse am Außenrande trägt. Mit einer weiteren Formel kann berechnet werden, wie sich die Grundeigenfrequenz ändert, falls man den Innenrand elastisch einspannt und den Außenrand mit einer trägen Masse (Beschaufelung) belegt.

**2. Herleitung der Näherungsformel.** Im folgenden seien dieselben Bezeichnungen wie von *Grammel* benutzt, wobei der Index *o* und der Index *a* besagen mögen, daß die betreffenden Größen am Innen- bzw. am Außenrand der Scheibe zu nehmen sind, nämlich *r* der radiale Abstand eines Scheibenpunktes von der Scheibendrehachse;  $\psi(r)$  die Amplitude der sinusförmig von der Zeit abhängigen Torsionsschwingung eines Scheibenpunktes im Abstand *r* von der Scheibendrehachse um diese Achse, gemessen als Winkel im Bogenmaß;  $y(r)$  die Scheibendicke;  $\alpha = \alpha_k$  die *k*-te Eigenfrequenz der Scheibentorsionsschwingung;  $\gamma$  das spezifische Gewicht des Scheibenmaterials; *g* die Erdbeschleunigung; *G* der Schubmodul des Scheibenmaterials;  $\varepsilon$  die Bettungsziffer, die sich wie folgt berechnet: Ist  $M_0$  ein am Innenrand angreifendes Torsionsmoment, bezogen auf die Drehachse und  $\vartheta_0$  die Drehung des Innenrandes um die Drehachse infolge des Momentes  $M_0$ , so ist  $\varepsilon = M_0 / (2 \pi r_0^2 y_0 \vartheta_0)$ , wie man leicht aus der „Technischen Dynamik“, Seite 36, Gleichung (5) und (8) folgert. Ferner ist  $\Theta = \frac{\beta}{2} \gamma \frac{r_a^3}{g}$  das Massenträgheitsmoment (bezogen auf die Scheibendrehachse) der trägen Randmasse (Beschaufelung) je Flächeneinheit des Außenrandes. Die meist kleine dimensionslose Zahl  $\beta$  wird „Gewichtsfaktor der Beschaufelung“ genannt (siehe ebendort, S. 38).

Vernachlässigt man den Einfluß der Zentrifugalkraft, was nach *Grammel* (ebendort S. 35) bei der Bestimmung der Torsionseigenfrequenzen zulässig ist, so lautet die Differentialgleichung für die Torsionsschwingungen ohne Knotendurchmesser [ebendort S. 33, Formel (9)]

$$\psi'' + \left(\frac{y'}{y} + \frac{3}{r}\right)\psi' + \lambda^2 \psi = 0, \tag{1}$$

wobei Striche Ableitungen nach *r* bedeuten, mit den Eigenwerten

$$\lambda = \lambda_k = 2 \pi \alpha_k \sqrt{\frac{\gamma}{g G}}. \tag{2}$$

Für den Innenrand ( $r = r_0$ ) gilt [ebendort S. 36, Formel (5)]

$$G r \psi' - \varepsilon \psi = 0 \tag{3}$$

und für den Außenrand ( $r = r_a$ ) [ebendort Formel (6)]

$$G r^2 \psi' - 4 \pi^2 \alpha^2 \Theta \psi = 0. \tag{4}$$

Durch Multiplikation mit geeigneten Faktoren lassen sich die Gleichungen (1), (3) und (4) nach Einführung von  $\mu = 4 \pi^2 \alpha^2$  auf die folgende selbstadjungierte Form bringen:

$$(G y r^3 \psi')' + \mu \frac{\gamma}{g} y r^3 \psi = 0, \tag{5}$$

<sup>1</sup> Siehe C. B. Biezeno u. R. Grammel, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 29ff., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.  
<sup>2</sup> H. Wittmeyer, Forsch. Ing.-Wes. 24 (1958) S. 37.



$$-G y r^3 \psi' + \varepsilon y r^2 \psi = 0 \quad (r = r_0), \quad (6)$$

$$G y r^3 \psi' - \mu y r \Theta \psi = 0 \quad (r = r_a). \quad (7)$$

Diese Gleichungen können gemäß meinen früheren Gleichungen<sup>1</sup> (1), (3), (8) und (9) als die Differentialgleichung nebst zugehörigen Randbedingungen für die Torsionsschwingungen eines Stabes von der Länge  $r_a - r_0$  mit der Längskoordinate  $r - r_0$  aufgefaßt werden, wenn man diesem Stabe die folgenden Baugrößen gibt:  $G y r^3$  die Torsionssteifigkeit des Stabes,  $(\gamma/g) y r^3$  das Massenträgheitsmoment des Stabes je Längeneinheit,  $\varepsilon y_0 r_0^2$  die Torsionsfederzahl der elastischen Einspannung des Stabes bei  $r = r_0$  (Moment je Winkel im Bogenmaß),  $y_a r_a \Theta$  das Massenträgheitsmoment, bezogen auf die Torsionsachse des Stabes, einer Masse am Stabende ( $r = r_a$ ),  $\mu$  das Quadrat einer Torsionseigenkreisfrequenz des Stabes.

Bei der Anwendung der Formeln aus meiner Arbeit (Abschnitt 3) auf diesen „Ersatzstab“, der die gleichen Eigenfrequenzen wie die Scheibe hat, ergeben sich insofern einfache Verhältnisse, als die Verdrehsteifigkeit dem Trägheitsmoment je Längeneinheit proportional ist. Eine Scheibe mit  $y = \text{konst.} \cdot r^{-3}$  entspricht einem Stabe mit konstantem Trägheitsmoment je Längeneinheit und konstanter Steifigkeit, eine sich weniger nach außen verjüngende Scheibe entspricht einem Stabe mit nach außen zunehmendem Trägheitsmoment je Längeneinheit und zunehmender Steifigkeit. Um insbesondere die letztgenannten, praktisch wichtigen Scheiben durch die Näherungsformeln erfassen zu können, wurde der Gültigkeitsbereich der Formel (68) meiner früheren Arbeit für die Kennwerte  $\alpha_{Tk} = \alpha_{Tk}(L_T)$  und  $t_2 = t_2(L_T)$  angegebenen Formeln entsprechend erweitert. Die einfache Anwendung meiner früheren Formeln auf den hier definierten Ersatztorsionsstab soll hier nicht im einzelnen ausgeführt werden. Das Resultat ist in den beiden nächsten Abschnitten dargestellt.

**3. Torsionseigenfrequenzen einer Kreisscheibe mit fester Einspannung am Innenrand und mit freiem Außenrand.** Die Dickenverteilung der Scheibe sei durch  $y = y(r)$  mit viermal stetig differenzierbarem  $y(r)$  gegeben. Ist die Scheibe bei  $r = r_0$  fest eingespannt und bei  $r = r_a$  frei, so berechnet man Näherungswerte für ihre drei ersten Torsionseigenfrequenzen  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  auf folgende Weise: Mit

$$r_1 = r_0 + 0,12 (r_a - r_0), \quad r_2 = r_0 + 0,88 (r_a - r_0) \quad (8)$$

bilde man

$$L_T = 2 \lg \frac{r_1^3 y(r_1)}{r_2^3 y(r_2)} \quad (9)$$

und weiter

$$\alpha_{T1} = 0,25 + 0,076743 L_T + 0,0057825 L_T^2 - 0,00007882 L_T^3, \quad (10)$$

$$\alpha_{T2} = 0,75 + 0,025581 L_T + 0,0091235 L_T^2 - 0,00010018 L_T^3, \quad (11)$$

$$\alpha_{T3} = 1,25 + 0,015349 L_T + 0,0056615 L_T^2 - 0,00002878 L_T^3. \quad (12)$$

$L_T$  muß in dem Intervall

$$-5 \leq L_T \leq 1,7 \quad (13)$$

liegen. Dann wird

$$\alpha_k \approx \alpha_{Tk} \frac{1}{(r_a - r_0)} \sqrt{\frac{g G}{\gamma}} \quad (k = 1, 2, 3). \quad (14)$$

Falls

$$G_T = \left| \lg \frac{r_1^3 y(r_1) r_2^3 y(r_2)}{[r_m^3 y(r_m)]^2} \right| \leq 1,11 \sqrt{\alpha_{T1}}, \quad r_m = \frac{1}{2} (r_0 + r_a) \quad (14a)$$

ist, erhält man einen im allgemeinen besseren Näherungswert für  $\alpha_1$ , wenn man in (14) für  $k = 1$  die Ersetzung

$$\alpha_{T1} \rightarrow \bar{\alpha}_{T1} = \alpha_{T1} - 0,119 G_T^2 \quad (14b)$$

vornimmt. Ändert sich dabei die Frequenz  $\alpha_1$  wesentlich, so wird von einer Anwendung von (14) für  $k > 1$  von (18) abgeraten. Ist (14a) nicht erfüllt, so können die Torsionseigenfrequenzen der betreffenden Scheibe mit den Formeln dieser Arbeit im allgemeinen nicht mit brauchbarer Genauigkeit berechnet werden. Dies ist das Ergebnis einer Reihe von Beispielrechnungen.

**4. Änderung der Grundtorsionseigenfrequenz der Kreisscheibe infolge elastischer Einspannung des Innenrandes und Massenbelegung des Außenrandes.** Der Innenrand sei mit der Bettungs-

<sup>1</sup> Siehe Fußnote 2 Seite 113.

ziffer  $\varepsilon$  elastisch eingespannt und der Außenrand mit einer Beschau felung mit dem Gewich tsfaktor  $\beta$  versehen. Die Trägheitswirkung der Einspannung sei vernachlässigt und die Beschau felung als starr angesehen. Zur Frequenzberechnung ermittle man zunächst unter Benutzung von  $L_T$  nach (9) den Wert

$$t_2 = 1 - 0,330938 L_T + 0,0648817 L_T^2 + 0,00006119 L_T^3. \tag{15}$$

Hiermit und mit  $\alpha_{T1}$  nach (10) bestimme man

$$\Delta\alpha_{T1} = -t_2 \alpha_{T1} \frac{r_a}{(r_a - r_0)} \left( \frac{\beta}{2} + \frac{G}{\varepsilon} \frac{r_0}{r_a} \right). \tag{16}$$

Mit

$$\alpha_{T1}^* = \alpha_{T1} + \Delta\alpha_{T1} \tag{17}$$

ergibt sich schließlich für die Grundtorsionseigenfrequenz  $\alpha_1^*$  der am Innenrand elastisch eingespannten und am Außenrand mit träger Masse besetzten Scheibe

$$\alpha_1^* \approx \alpha_{T1}^* \frac{1}{(r_a - r_0)} \sqrt{\frac{g G}{\gamma}}. \tag{18}$$

Damit der Fehler von  $\alpha_1^*$  höchstens etwa 1% (2%) größer ist als der von  $\alpha_1$ , sollte die aus (16) zu berechnende Größe  $|\Delta\alpha_{T1}/\alpha_{T1}|$  den Wert  $0,085 + 0,0056 L_T$  (bzw.  $0,127 + 0,0064 L_T$ ) nicht überschreiten. Dies ist das Ergebnis einer größeren Anzahl von Beispielrechnungen. Hinsichtlich  $\varepsilon$  ist diese Bedingung erfüllt, wenn der Wellenhalbmesser nicht wesentlich kleiner als der Innenhalbmesser der Scheibe sowie die größte Scheibendicke ist, und wenn der kleinste Abstand eines Schwingungsknotens der Welle von der Scheibe klein gegen den Scheibenhalbmesser ist. Sollte die Bedingung wegen eines zu großen  $\beta$  nicht erfüllt sein, so empfiehlt es sich (insbesondere, falls  $L_T < 0$  ist), den Einfluß der Zusatzmasse am Außenrande mit Hilfe des *Dunkerleyschen* Verfahrens zu erfassen.

**5. Beispiele.** Als erstes Beispiel für eine Frequenzberechnung wählen wir wie bei *Grammel* (ebendort Seite 38 unten) eine Stahlscheibe mit der Dickenverteilung  $y = c r^{-3}$ , wo  $c$  eine positive Konstante ist, mit starrer Einspannung am Innenrand mit dem Halbmesser  $r_0 = 10$  cm und einer Beschau felung mit dem Gewich tsfaktor  $\beta = 1/20$  am Außenrand mit dem Halbmesser  $r_a = 40$  cm. Wie bei *Grammel* (ebendort Seite 34) sei  $\sqrt{g G/\gamma} = 3,26 \cdot 10^5$  cm/s. Nach (9), (10), (15) und (17) wird  $L_T = 1$ ,  $\alpha_{T1} = 0,25$ ,  $t_2 = 1$  und  $\alpha_{T1}^* = 0,2417$ , und damit wird die Grundtorsionseigenfrequenz der Scheibe ohne Beschau felung nach (14) ungefähr gleich 2717 Hz und mit Beschau felung nach (18) ungefähr gleich 2630 Hz. Diese Werte unterscheiden sich in den angegebenen Ziffern nicht von den zugehörigen exakten Werten.

Als zweites Beispiel sei dieselbe Scheibe mit der Abänderung untersucht, daß ihr Dickenverlauf durch  $y = c r^{-1}$  dargestellt wird, wo  $c$  eine positive Konstante ist. Ohne Beschau felung ergeben sich nach (14) folgende Torsionseigenfrequenzen, wobei in Klammern jeweils die relativen Fehler<sup>1</sup> gegenüber der exakten Lösung angegeben sind:  $\alpha_1 \approx 1478$  Hz (0,16%),  $\alpha_2 \approx 7970$  Hz (1,3%),  $\alpha_3 \approx 13480$  Hz (0,5%). Eine Beschau felung mit dem Gewich tsfaktor  $\beta = 1/20$  setzt nach (18) die Grundtorsionseigenfrequenz auf  $\alpha_1^* \approx 1394$  Hz (−0,2%) herab. Wird diese Scheibe außerdem am Innenrand elastisch mit einer Bettungsziffer  $\varepsilon = 3 G$  gelagert, so ergibt (18) als noch tiefere Grundeigenfrequenz  $\alpha_1^* \approx 1110$  Hz (−1,6%)<sup>2</sup>.

Als drittes Beispiel seien die drei ersten Torsionseigenfrequenzen der Scheibe mit dem „Sonderprofil“ nach *Grammel* (ebendort Seite 39, Abb. 34) berechnet. Hier ist der Dickenverlauf durch  $y = 10^4 e^{r/15} r^{-3}$  gegeben, wo  $y$  und  $r$  in cm zu rechnen sind. Ferner ist  $r_0 = 10$  cm und  $r_a = 50$  cm. Ist die Stahlscheibe am Innenrand starr eingespannt und am Außenrand frei, so ergibt Formel (14) folgende Werte:  $\alpha_1 \approx 1090$  Hz (−0,16%),  $\alpha_2 \approx 5980$  Hz (−0,12%) und  $\alpha_3 \approx 10\,112$  Hz (−0,02%). Daß diese letzten Näherungswerte so besonders genau werden, liegt daran, daß Formel (14) dadurch hergeleitet ist, daß das vorhandene Profil durch eines mit dem Dickenverlauf  $y = c_1 e^{c_2 r} r^{-3}$  approximiert wird, wo  $c_1$  und  $c_2$  geeignet gewählte Konstanten sind. Für „Sonderprofile“ nach *Grammel* wird die Formel (14) also besonders genau.

Schließlich seien Näherungswerte für die Grundtorsionseigenfrequenzen von Scheiben mit dem Profil  $y = Y = a e^{-\left(\frac{r}{c}\right)^p}$  berechnet, wo  $c = 2,5 r_a$ ,  $r_0/r_a = 0,05$  (0,05) 0,25 und  $p = 1$  oder 2 ist. Exakte Werte zum Vergleich finden sich in einer kürzlich erschienenen Arbeit von *Tameroğlu*<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Ein positives Zeichen bei dem Fehler bedeutet, daß der Näherungswert zu groß ist.  
<sup>2</sup> Obgleich bei diesem Beispiel  $|\Delta\alpha_{T1}/\alpha_{T1}|$  wesentlich größer ist, als dies nach unserer Empfehlung sein sollte, ist die Genauigkeit von  $\alpha_1^*$  überraschend gut.  
<sup>3</sup> S. *Tameroğlu*, Ing.-Arch. 26 (1958), S. 212.

Schließt man die Profile mit  $r_0/r_a = 0,05$  aus, so erfüllen alle übrigen die Ungleichung (14a). Wendet man auf diese übrigen die Formel (14) unter Beachtung von (14b) an, so erhält man die Grundtorseionseigenfrequenzen mit einem Fehler von absolut höchstens 2,1%. In den beiden wegen (14a) ausgeschlossenen Beispielen für  $r_0/r_a = 0,05$  hätte man für  $p = 1$  einen Fehler von  $-1,4\%$  und für  $p = 2$  einen Fehler von  $-10\%$  erhalten. Die Beispiele von *Tameroğlu* zeigen, daß Profile mit kleinem  $r_0/r_a$  am leichtesten außerhalb des zulässigen Anwendungsbereiches der Formel (14) [mit oder ohne Berücksichtigung von (14b)] liegen können. Für  $r_0/r_a \geq 0,15$  ist der Fehler bei den Grundtorseionseigenfrequenzen für Scheiben mit den Profilen  $y = Y$  in den angeführten Beispielen stets kleiner als 1%, falls in (14) die Ersetzung (14b) vorgenommen wird.

Es sei noch angemerkt, daß die Dickenverteilungen  $y = y(r)$  in diesen Beispielen nur deshalb in so einfacher analytischer Form vorgegeben wurden, damit es möglich war, die zum Vergleich benötigten exakten Werte zu berechnen.

**6. Schlußbemerkung.** Die in dieser Arbeit hergeleiteten Formeln sind Anwendungsbeispiele für ein allgemeines Verfahren zur Aufstellung von Näherungsformeln für die Eigenwerte technischer Eigenwertprobleme, das der Verfasser dargestellt hat<sup>1</sup>. Nach geeigneter Erweiterung könnte man mit dieser Methode bei Bedarf auch entsprechende Näherungsformeln für die Dehnungsschwingungen einer Kreisscheibe aufstellen. In diesem Falle müßte man die gegebene Differentialgleichung nicht wie in meiner früheren Arbeit durch eine mit konstanten Koeffizienten approximieren, sondern durch eine etwas kompliziertere Differentialgleichung, die jedoch in die *Besselsche* übergeführt werden kann.

(Eingegangen am 14. Juni 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. H. Wittmeyer, Linköping (Schweden), Valkebogatan 14 A.

<sup>1</sup> H. Wittmeyer, J. Soc. Industrial and Applied Math. 6 (1958) S. 111.



Biegeeigenfrequenzen eines gelenkig gelagerten Balkens

Von H. Wittmeyer

**1. Einleitung.** Die Biege- und Torsionsfrequenzen von geraden Balken bzw. Stäben können — wie bekannt— ohne Schwierigkeit mit den Verfahren von *W. Ritz* und *R. Grammel* oder durch Iteration berechnet werden.

Für gewisse Randbedingungen kann man jedoch diese Frequenzen mit wesentlich geringerem Zeitaufwand berechnen, wenn man die einfachen Näherungsformeln benutzt, die der Verfasser in früheren Veröffentlichungen <sup>1,2,3,4</sup> hergeleitet hat. In Fortsetzung der durch diese Veröffentlichungen begonnenen Untersuchungsreihe wird in der vorliegenden Arbeit eine einfache Formel für die angenäherte Berechnung der Biegeeigenfrequenzen  $f_{Bn,ex}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) eines an beiden Enden gelenkig gelagerten Balkens hergeleitet, dessen veränderliche Querschnittsgrößen zur Mitte zwischen den Auflagerpunkten symmetrisch sind.

Zur Herleitung der Näherungsformel wird im Prinzip die gleiche Methode angewandt wie in den oben erwähnten vier Veröffentlichungen. Diese Methode ist am allgemeinsten in der vierten dargestellt. In ihr approximiert man den ersten Eigenwert einer gegebenen Differentialgleichung durch den ersten Eigenwert einer Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Diese wird in geeigneter Weise aus einer ein- oder mehrparametrischen Schar solcher Differentialgleichungen ausgewählt.

Die in der vorliegenden Arbeit behandelten Randbedingungen weichen insofern von den damals zugelassenen ab, als nunmehr an beiden Enden sowohl geometrische als auch dynamische (natürliche) Randbedingungen vorgeschrieben sind, während früher an einem Ende nur geometrische und am anderen nur dynamische Randbedingungen zugelassen waren. Bemerkenswert bei diesem Anwendungsbeispiel ist, daß man in ihm die Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten aus einer zweiparametrischen Schar auswählen muß, während man bei den Beispielen der vier früheren Arbeiten des Verfassers stets mit einer einparametrischen Schar auskam.

In Abschnitt 2 wird zunächst die in dieser Arbeit hergeleitete Formel in einer praktisch unmittelbar anwendbaren Form dargestellt. Die Genauigkeit der Formel zeigen Beispiele in Abschnitt 3. Die Abschnitte 4 bis 6 enthalten die Herleitung der Formel.

**2. Die Näherungsformel.** Bei dem beiderseitig gelenkig gelagerten Balken der Länge  $2l$  (Abb. 1) sei  $x$  der Abstand eines Querschnittes vom linken Auflager und  $\xi = x/l$  die zugehörige dimensionslose Koordinate. Ferner sei

$E I = K_B(x) = K_{BM} j(\xi)$  (1)

die Biegesteifigkeit des Balkens, wo  $E$  der Elastizitätsmodul und  $I$  das Flächenträgheitsmoment, bezogen auf die Biegeachse, ist und

$M(x) = M_M m(\xi)$  (2)

die Masse des Balkens je Längeneinheit. Dabei besage der Index  $M$ , daß die betreffende Größe in Balkenmitte ( $x = l$ ) zu nehmen ist. Im Intervall  $0 \leq \xi \leq 1$  seien  $j(\xi)$  und  $m(\xi)$  positiv und im Intervall  $0 \leq \xi < 1$  zweimal stetig differenzierbar. Ferner sei  $j(1 + \xi) = j(1 - \xi)$  und  $m(1 + \xi) = m(1 - \xi)$  für  $0 \leq \xi \leq 1$ . Die Biegesteifigkeit und die Masse je Längeneinheit seien also zur Balkenmitte symmetrisch. In Balkenmitte wird die Stetigkeit der Ableitungen von  $j(\xi)$  und  $m(\xi)$  nicht gefordert.

Zur Frequenzermittlung berechne man zunächst mit

$B_i = \sqrt[4]{\frac{m(\xi_i)}{j(\xi_i)}}, \quad \xi_i = \frac{i}{4} \quad (i = 0, 1, 2, 3)$  (3)

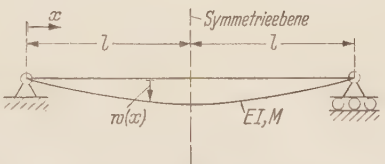


Abb. 1. Der beiderseitig gelenkig gelagerte, zur Mitte symmetrische Balken.

<sup>1</sup> H. Wittmeyer, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 331.  
<sup>2</sup> H. Wittmeyer, Z. angew. Math. Mech. 36 (1956), S. 355.  
<sup>3</sup> H. Wittmeyer, Forsch. Ing.-Wes. 24 (1958), S. 37.  
<sup>4</sup> H. Wittmeyer, J. Soc. Industrial and Applied Math. 6 (1958), S. 111.

die Werte<sup>1</sup>

$$B = \frac{1}{12} (B_0 + 4 B_1 + 2 B_2 + 4 B_3 + 1), \quad (4)$$

$$\xi_B = \frac{B}{2 (B_0 + B_1)}, \quad (5)$$

$$L_p = \{\lg [m(\xi_B) j(\xi_B)]\}^2, \quad (6)$$

$$L_q = \lg \frac{j(0)}{m(0)}. \quad (7)$$

Tabelle 1. Interpolationstabelle für die in (9) und (10) benötigten Funktionen  
 $F_1 = 0,62666 - 0,012556 L_p + 0,0001097 L_p^2$ ;  $F_2 = 1,25331 - 0,014522 L_p + 0,0000588 L_p^2$ .

$L_p$	$F_1$	$\Delta F_1$	$F_2$	$\Delta F_2$
0	0,6267		1,2533	
1	0,6142	—125	1,2388	—145
2	0,6020	—122	1,2244	—144
3	0,5900	—120	1,2102	—142
4	0,5782	—118	1,1962	—140
5	0,5666	—116	1,1822	—140
6	0,5553	—113	1,1683	—139
7	0,5442	—111	1,1546	—137

Im folgenden wird vorausgesetzt<sup>2</sup>:

$$L_p \leq 7, \quad -3,5 \leq L_q \leq 0, \quad (8)$$

Dann ermittle man mit  $F_i(L_p)$  ( $i = 1, 2$ ) nach Tabelle 1 die Größen

$$\alpha_1 = F_1(L_p) - L_q (0,073100 - 0,0011195 L_p) + L_q^2 (0,001806 + 0,0000610 L_p), \quad (9)$$

$$\alpha_2 = F_2(L_p) + L_q^2 (0,005275 - 0,0000181 L_p) \quad (10)$$

und weiter für ungerade  $n > 1$

$$\alpha_n^2 = \frac{\pi}{8} n^2 + L_p \left( 0,093758 - 0,119377 \frac{1}{n} \right) - L_q (0,091617 - 0,013185 L_q), \quad (11)$$

sowie für gerade  $n > 2$

$$\alpha_n^2 = \frac{\pi}{8} n^2 + L_p \left( 0,093758 - 0,238754 \frac{1}{n} \right) + 0,013185 L_q^2. \quad (12)$$

Mit

$$\beta_n = \left( \frac{\alpha_n}{B} \right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

erhält man schließlich als Näherungswerte  $f_{Bn}$  für sämtliche Biegeeigenfrequenzen  $f_{Bn, ex}$  des Balkens die Werte

$$f_{Bn} = \beta_n \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{K_{BM}}{M_M}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (14)$$

Wie sich später ergeben wird, liefern diese Formeln die genauesten Werte für die Grundbiegeeigenfrequenz ( $n = 1$ ) und für die Eigenfrequenzen höherer Ordnungszahl  $n$ . Besonders gute Genauigkeit ist zu erwarten, falls  $j(\xi)$  und  $m(\xi)$  monotone Funktionen sind, da die Massen- und Steifigkeitsverläufe, für die (14) exakt gilt (s. Abschnitt 7), ebenfalls monoton sind.

Die Genauigkeit der Frequenzen  $f_{Bn}$  ist für gerade  $n$  etwas unsicher. Die entsprechenden Formeln sind hier nur wegen des Fehlens besserer, gleicher Einfachheit angegeben.

<sup>1</sup> Hier und im folgenden bedeutet  $\lg$  den Logarithmus zur Basis 10 und  $\ln$  den Logarithmus zur Basis  $e$ .

<sup>2</sup> Der zweite Teil von (8) enthält die Forderung, daß das Verhältnis von Biegesteifigkeit zu Masse je Längeneinheit in der Mitte nicht kleiner sein darf als an den Enden. Diese Forderung dürfte in der Praxis im allgemeinen erfüllt sein.

Ersetzt man bei einem Balken  $M$  durch  $K_B^{-1}$  und  $K_B$  durch  $M^{-1}$  so ersieht man aus (1) bis (14), daß sich  $f_{Bn}$  dadurch nicht ändert. Dieselbe Eigenschaft hat auch der exakte Wert  $f_{Bn,ex}$ , wie man nach dem Vorgang von *Hohenemser*<sup>1</sup> direkt aus der Differentialgleichung für den schwingenden Balken herleiten kann.

**3. Beispiele.**<sup>2</sup> In den Beispielen zur Anwendung der Formel (14) sind Näherungswerte  $f_{Bk}$  für die Biegeeigenfrequenzen  $f_{Bn,ex}$  eines beiderseitig gelenkig gelagerten Stabes der Länge  $2l$  berechnet, dessen Querschnittswerte zur Mitte zwischen den beiden Auflagern symmetrisch sind. Die Frequenzbeiwerte  $\beta_n$  nach (13) sind mit den entsprechenden exakten Werten

$$\beta_{n,ex} = f_{Bn,ex} l^2 \sqrt{\frac{M_M}{K_M}}$$

(15)

verglichen und die relativen Fehler

$$\varphi_n = \frac{\beta_n - \beta_{n,ex}}{\beta_{n,ex}}$$

(16)

Tabelle 2. Exakte Frequenzbeiwerte  $\beta_{n,ex}$  und relative Fehler  $\varphi_n$  der zugehörigen Näherungswerte  $\beta_n$  nach (13) für sieben beiderseitig gelenkig gelagerte, zur Mitte symmetrische Balken.

Balken Nr.	Form einer Balkenhälfte	Dimensionslose Biegesteifigkeit nach (1) $j(\xi)$	Dimensionslose Masse je Längen- einheit nach (2) $m(\xi)$	Para- meter C	Exakte Frequenzbeiwerte nach (15)				Relative Fehler in Prozenten nach (16) bei Anwendung der Näherungsformel (14)			
					$\beta_{1,ex}$	$\beta_{2,ex}$	$\beta_{3,ex}$	$\beta_{4,ex}$	$\varphi_1(\%)$	$\varphi_2(\%)$	$\varphi_3(\%)$	$\varphi_4(\%)$
1	Trapezförmiges Federblech konstanter Dicke			2	0,3872	1,554	3,55		—0,05	0,2	0,3	
2		$\frac{1 + C \xi}{1 + C}$	$\frac{1 + C \xi}{1 + C}$	4	0,3832	1,539			—0,11	0,6		
3				10	0,3779	1,516	3,54	6,26	—0,13	1,2	1,4	1
4	Von zwei Para- belbögen begrenz- tes Federblech konstanter Dicke	$\frac{4 - 3(\xi - 1)^2}{4}$	$\frac{4 - 3(\xi - 1)^2}{4}$	—	0,3891	1,555	3,52		0	0,5	0,7	
5				2	0,2828	0,954			—0,01	—1,0		
6	Dünnwandiger Hohlkegelstumpf konstanter Wandstärke	$\frac{(1 + C \xi)^3}{(1 + C)^3}$	$\frac{1 + C \xi}{1 + C}$	4	0,2446	0,783			—0,01	—1,8		
7				10	0,1997	0,601	1,70	2,83	—1,1	—3,8	0,3	—4,3

von  $\beta_n$  ermittelt. Die für verschiedene Balken errechneten Werte  $\beta_{n,ex}$  und  $\varphi_n$  (diese in Prozenten ausgedrückt) sind in Tabelle 2 aufgeführt. Die Genauigkeit der Näherungsformel erweist sich in diesen Beispielen für den Grundton bei einem Fehler von absolut genommen höchstens 1,1% als recht befriedigend. Die berechneten Obertöne  $f_{Bn}$  niedriger Ordnungszahl  $n$  zeigen geringere Genauigkeit. Die bis zu  $n = 4$  berechneten Oberfrequenzen  $f_{Bn}$  des Balkens Nr. 7 mit stark veränderlichem Querschnitt weisen Fehler bis zu absolut genommen 4% auf. Besonders schlechte Genauigkeit haben bei diesem Balken die Frequenzen mit gerader Ordnungszahl  $n$ . Daß dies kein Zufall ist, zeigt die Herleitung der diesbezüglichen Formel in Abschnitt 6. Wie bereits erwähnt wurde und genauer aus den späteren Ableitungen in den Abschnitten 5 und 6 hervorgehen wird, kann man für sehr große  $n$  wieder eine bessere Genauigkeit der Näherungswerte  $f_{Bn}$  erwarten.

Entsprechend der Bemerkung am Schluß des Abschnittes 2 ändern sich sowohl die exakten Frequenzbeiwerte  $\beta_{n,ex}$  der hier angeführten Beispiele als auch ihre Näherungswerte  $\beta_n$  nach (13) nicht, wenn man  $m$  durch  $j^{-1}$  und  $j$  durch  $m^{-1}$  ersetzt. Auf diese Weise kann man die Anzahl der

<sup>1</sup> K. Hohenemser, Die Methoden zur angenäherten Lösung von Eigenwertproblemen in der Elastikinetik. Ergebnisse der Math. u. ihrer Grenzgebiete, Bd. 1, H. 4. S. 54 u. S. 68: „Die Reziprozität von Masse und Steifigkeit“, Berlin 1933.

<sup>2</sup> Diese Beispiele sowie die hierfür benötigten Funktionen und Konstanten in den Abschnitten 4 b) und 6 wurden von Herrn Ing. G. Andersson und Herrn B. Franzén berechnet.



Beispiele ohne weitere Rechenarbeit verdoppeln. Die so erhaltenen neuen Beispiele betreffen dann Balken, die in ihrer Mitte eine kleinere Masse je Längeneinheit und eine kleinere Biegesteifigkeit haben als an den Enden. Das Verhältnis von Biegesteifigkeit zu Masse je Längeneinheit ist jedoch auch bei den neuen Beispielen in der Mitte nicht kleiner als an den Enden.

Die in Tabelle 2 aufgeführten „exakten Werte“  $\beta_{n,ex}$  wurden durch hinreichend oft wiederholte Iteration mit anschließendem Ritzschen Verfahren berechnet, wobei alle vorkommenden Integrationen mittels der Trapezregel durchgeführt wurden. Um den Einfluß der hierbei benutzten Schrittweite  $\Delta\xi$  von  $\xi$  auf die Resultate so weit wie möglich zu eliminieren, wurden die Frequenzen für die drei Schrittweiten  $\Delta\xi = 0,1; 0,05$  und  $0,025$  berechnet, als quadratische Funktionen von  $(\Delta\xi)^2$  dargestellt und nach  $(\Delta\xi)^2 = 0$  extrapoliert. Der durch diese Extrapolation erhaltene Wert wurde als der „exakte Wert“ angesehen. Um zu zeigen, wie der durch numerische Integration erhaltene Näherungswert  $\bar{\beta}_1$  für  $\beta_{1,exakt}$  von der Schrittweite  $\Delta\xi$  abhängt, ist in Tabelle 3 der Wert  $\bar{\beta}_1$  als Funktion von  $\Delta\xi$  für den Balken Nr. 1 aus Tabelle 2 aufgeführt. In der letzten Spalte von Tabelle 3 ist der durch Extrapolation gefundene „exakte Wert“ angegeben. Man sieht, daß durch diese Extrapolation bereits die dritte geltende Ziffer geändert wird.

Tabelle 3. Abhängigkeit des durch Iteration mit anschließendem Ritzschen Verfahren gewonnenen Näherungswertes  $\bar{\beta}_1$  für den Frequenzbeiwert  $\beta_{1,ex}$  von der Schrittweite  $\Delta\xi$  bei den numerischen Integrationen. (Balken Nr. 1 aus Tabelle 2.)

Schrittweite $\Delta\xi$	0,1	0,05	0,025	0 (extrapoliert)	„Exakter Wert“
Näherungswert $\bar{\beta}_1$	0,38871	0,38760	0,38731	0,38721	$\beta_{1,ex} = 0,3872$

**4. Herleitung der Näherungsformel (14) für die Grundbiegeeigenfrequenz.** a) Formulierung der Aufgabe als Variationsproblem I. Die zu  $x = l$  symmetrische Durchbiegungsamplitude  $w = w(x)$  ist wegen der vorausgesetzten Symmetrie von  $K_B(x)$  und  $M(x)$  Lösung des bekannten Variations-Eigenwertproblems

$$\delta \int_0^l \frac{1}{2} [K_B (w'')^2 - \lambda M w^2] dx = 0, \quad (17)$$

wobei Striche Ableitungen nach  $x$  bedeuten, mit den geometrischen Randbedingungen

$$w = 0 \quad (x = 0), \quad (18)$$

$$w' = 0 \quad (x = l). \quad (19)$$

Die hier vorgenommene Beschränkung auf symmetrische Schwingungsformen werden wir zwecks Vereinfachung im ganzen Abschnitt 4 beibehalten und auch noch in Abschnitt 5 voraussetzen.

Die Eigenwerte  $\lambda = \lambda_k$  hängen mit den exakten Eigenfrequenzen des Balkens der Länge  $2l$  wie folgt zusammen:

$$\lambda_k = (2\pi f_{B,2k-1,ex})^2 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (20)$$

Durch die angeführte Beschränkung haben wir also zunächst die Eigenfrequenzen  $f_{Bn,ex}$  mit gerader Ordnungszahl  $n$  ausgeschlossen. Durch die Transformation

$$w = q_1, \quad w' = q_2, \quad w'' = q_3 \quad (21)$$

führen wir statt  $w(x)$  und seiner Ableitungen die drei Funktionen  $q_1, q_2$  und  $q_3$  ein. Sie hängen durch die Beziehungen

$$q'_1 - q_2 = 0, \quad q'_2 - q_3 = 0 \quad (22)$$

zusammen. Um die Funktionen  $q_1, q_2$  und  $q_3$  in dem transformierten Variationsproblem unabhängig voneinander variieren zu können, addieren wir unter dem Integralzeichen von (17) die linken Seiten der Gleichungen (22), noch multipliziert mit Lagrangeschen Faktoren  $p_1$  bzw.  $p_2$ . Damit ergibt die Transformation (21) schließlich

$$\delta \int_0^l \frac{1}{2} [(K_B q_3^2 - \lambda M q_1^2 + 2 p_1 (q'_1 - q_2) + 2 p_2 (q'_2 - q_3)] dx = 0 \quad (23)$$

mit den Randbedingungen

$$q_1 = 0 \quad (x = 0), \quad q_2 = 0 \quad (x = l). \quad (24)$$

In einer kleinen Zwischenbetrachtung sei die physikalische Bedeutung der hier eingeführten Größen  $p_1$  und  $p_2$  geklärt. Dazu schreiben wir die *Eulerschen* Gleichungen von (26) auf, die durch Variation von  $q_2$  und  $q_3$  entstehen:

$$p_1 + p_2' = 0, \tag{25}$$

$$K_B q_3 - p_2 = 0. \tag{26}$$

Hieraus folgt bei Beachtung von (21)

$$p_1 = -(K_B w'')', \quad p_2 = K_B w''. \tag{27}$$

Bei geeigneter Vorzeichenfestsetzung stellt also die Größe  $p_1$  die Querkraft und die Größe  $p_2$  das Biegemoment dar. In der folgenden Herleitung arbeiten wir also gleichzeitig mit den Deformationen  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q_3$  sowie den zu den beiden ersten gehörenden „generalisierten Kräften“  $p_1$  und  $p_2$ . Der Gedanke, diese Größen bei der Berechnung von Biegeeigenfrequenzen gleichzeitig zu benutzen, findet sich bereits bei *Myklestad*<sup>1</sup> und geht auf einen Gedanken von *Holzer*<sup>2</sup> zurück<sup>3</sup>, der vor *Mykelstad* ein entsprechendes Verfahren bei Torsionsschwingungen anwandte. In neuerer Zeit wird dieser Gedanke in steigendem Maße benutzt<sup>4,5,6</sup>.

Nun transformieren wir das Variationsproblem (23), (24) in eine Gestalt, bei der nur noch „weniger wichtige“ Koeffizienten von der unabhängigen Variablen abhängen. „Weniger wichtig“ sind dabei solche Koeffizienten, deren Abänderung das asymptotische Verhalten der Eigenwerte in erster Näherung nicht ändert. Eine solche Transformation, die  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $x$  und  $\lambda$  in  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$ ,  $\eta$  bzw.  $\mu$  überführt, läßt sich sofort als Spezialfall einer allgemeineren angeben, die in Kapitel 4 der vierten zitierten Arbeit des Verfassers angegeben ist:

$$x = l \int_0^\eta \frac{d\eta}{\tau}, \tag{28}$$

$$\lambda = \kappa \mu, \tag{29}$$

$$P_i = \bar{C}_i^{-1} P_i \quad (i = 1, 2), \tag{30}$$

$$q_i = \bar{C}_i Q_i \quad (i = 1, 2, 3). \tag{31}$$

Hierin sind mit der Bezeichnung

$$J = \int_0^l \left( \frac{M}{K_B} \right)^{\frac{1}{4}} dx \tag{32}$$

folgende Abkürzungen benutzt:

$$\kappa = J^{-4}, \tag{33}$$

$$\frac{\tau}{l} = J^{-1} \left( \frac{M}{K_B} \right)^{\frac{1}{4}}, \tag{34}$$

$$\bar{C}_i = J^2 M^{-\frac{1}{2}} \left[ J^{-1} \left( \frac{M}{K_B} \right)^{\frac{1}{4}} \right]^{i-\frac{1}{2}} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{35}$$

Führen wir noch die Bezeichnungen ein

$$h_1 = \frac{1}{4} \ln(e_1 K_B M), \quad h_2 = \frac{1}{8} \ln\left(e_2 \frac{M}{K_B}\right), \tag{36}$$

worin  $e_1$  und  $e_2$  positive Konstanten sind, die nur so gewählt werden müssen, daß die obigen Logarithmen dimensionslose Argumente haben, so ergibt die Transformation (28) bis (31) das

Variationsproblem I:

$$\delta \int_0^1 \left[ P_1 \dot{Q}_1 + P_2 \dot{Q}_2 + \frac{1}{2} Q_3^2 - P_1 Q_2 - P_2 Q_3 - \frac{1}{2} \mu Q_1^2 - h_1 (P_1 Q_1 + P_2 Q_2) - h_2 (\dot{P}_1 Q_1 - P_2 Q_2) \right] d\eta = 0, \tag{37}$$

<sup>1</sup> N. O. Myklestad, J. Aeronautical Sciences 11 (1944), S. 153.

<sup>2</sup> H. Holzer, Die Berechnung der Drehschwingungen, Berlin 1921.

<sup>3</sup> Herr Professor K. Lürenbaum machte mich freundlicherweise darauf aufmerksam, daß Holzer diesen Gedanken wiederum von Gumbel (Z. VDI 1912, S. 1025 u. 1085) übernommen hat.

<sup>4</sup> E. Pestel, Abhandl. Braunschweigischen Wissenschaftl. Gesellschaft 6 (1954), S. 227.

<sup>5</sup> K. Marguerre, J. Math. and Phys., 25 (1956), S. 28 (hier weitere Literaturhinweise).

<sup>6</sup> S. Falk, Ing.-Arch. 26 (1958), S. 96 (hier weitere Literaturhinweise).

wobei Punkte Ableitungen nach  $\eta$  bedeuten, mit den Randbedingungen

$$Q_1 = 0 \quad (\eta = 0), \quad (38)$$

$$Q_2 = 0 \quad (\eta = 1). \quad (39)$$

Damit die Lösungen eindeutig werden, fügen wir noch die Normierungsbedingung

$$\int_0^1 Q_1^2 d\eta = 1 \quad (40)$$

hinzu. Die nach aufsteigender Größe geordneten Eigenwerte seien mit  $\mu = \mu_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) bezeichnet.

b) Das dem Variationsproblem I „benachbarte“ Problem II. Der erste Eigenwert  $\mu_1$  des Variationsproblems I soll durch den ersten Eigenwert  $\bar{\mu}_1$  eines einfacheren Variationsproblems II angenähert werden. Problem II entsteht aus Problem I, wenn man hierin  $\dot{h}_1$  durch die Konstante  $b_1$  und  $\dot{h}_2$  durch die Konstante  $b_2$  ersetzt. Die Eigenwerte des Problems II seien mit  $\bar{\mu}_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) bezeichnet. Die zu dem kleinsten Eigenwert  $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_1(b_1, b_2)$  gehörigen Eigenfunktionen seien  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2$  und  $\bar{Q}_3$ .

Um die günstigsten Werte von  $b_1$  und  $b_2$  zu ermitteln, bilden wir zunächst ein Zwischenproblem III, das zwei Parameter  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$  so linear enthält, daß es für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  in Problem II und für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$  in Problem I übergeht:

$$\delta \int_0^1 \left\{ P_1 \dot{Q}_1 + P_2 \dot{Q}_2 + \frac{1}{2} Q_3^2 - P_1 Q_2 - P_2 Q_3 - \frac{1}{2} \mu Q_1^2 - [b_1 + \varepsilon_1 (\dot{h}_1 - b_1)] (P_1 Q_1 + P_2 Q_2) - [b_2 + \varepsilon_2 (\dot{h}_2 - b_2)] (P_1 Q_1 - P_2 Q_2) \right\} d\eta = 0. \quad (41)$$

Als Randbedingungen gelten (38), (39). Die Normierungsbedingung (40) wird ebenfalls gefordert. Die Eigenwerte dieses Variationsproblems seien mit  $\tilde{\mu}_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) bezeichnet. Es ist  $\tilde{\mu}_1 = \tilde{\mu}_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2; b_1, b_2)$ , und es gilt  $\tilde{\mu}_1(0, 0; b_1, b_2) = \bar{\mu}_1(b_1, b_2)$  und  $\tilde{\mu}_1(1, 1; b_1, b_2) = \mu_1$ . In erster Näherung wird  $\bar{\mu}_1 \approx \mu_1$  sein, falls man  $b_1$  und  $b_2$  so bestimmt, daß

$$\frac{\partial \bar{\mu}_1(0, 0; b_1, b_2)}{\partial \varepsilon_i} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (42)$$

ist.

Um mit Hilfe von (42) die günstigsten Werte  $b_1^*$ ,  $b_2^*$  von  $b_1, b_2$  zu bestimmen, beachten wir, daß für den stationären Wert  $A_s$  des unter dem Variationszeichen  $\delta$  stehenden Integrals in (41)

$$\frac{\partial A_s}{\partial \varepsilon_i} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (43)$$

gilt, was in ähnlicher Weise wie in Kapitel 2.3 der vierten oder in Kapitel 4.4 der dritten Arbeit des Verfassers gezeigt werden kann. Dabei sind bei der mit  $\partial$  bezeichneten partiellen Differentiation die Eigenfunktionen  $P_1, \dots, Q_3$  als konstant anzusehen. Aus (43) ergeben sich für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$  unter Beachtung von (42) die folgenden Bestimmungsgleichungen für die „günstigsten Werte“  $b_1 = b_1^*$  und  $b_2 = b_2^*$  im Variationsproblem II:

$$b_1 = \frac{\int_0^1 \dot{h}_1 (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 + \bar{P}_2 \bar{Q}_2) d\eta}{\int_0^1 (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 + \bar{P}_2 \bar{Q}_2) d\eta}, \quad (44)$$

$$b_2 = \frac{\int_0^1 \dot{h}_2 (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 - \bar{P}_2 \bar{Q}_2) d\eta}{\int_0^1 (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 - \bar{P}_2 \bar{Q}_2) d\eta}. \quad (45)$$

Weil  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{Q}_1$  und  $\bar{Q}_2$  in (44) und (45) die Eigenfunktionen des Variationsproblems II sind, hängen auch die rechten Seiten von (44) und (45) noch von  $b_1$  und  $b_2$  ab. Bevor wir  $b_1^*$  und  $b_2^*$  aus diesen beiden Gleichungen bestimmen können, müssen wir die Lösung des Variationsproblems II untersuchen. Das soll im nächsten Abschnitt geschehen.

c) Untersuchung des Variationsproblems II. Die zu  $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_1(b_1, b_2)$  gehörenden Eigenfunktionen  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2$  und  $\bar{Q}_3$  des Variationsproblems II, das sich aus (38) bis (41) für  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$



ergibt, genügen den folgenden *Eulerschen* Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{Q}}_1 - \bar{Q}_2 - (b_1 + b_2) \bar{Q}_1 &= 0, \\ \dot{\bar{Q}}_2 - \bar{Q}_3 - (b_1 - b_2) \bar{Q}_2 &= 0, \\ \dot{\bar{P}}_1 + \bar{\mu}_1 \bar{Q}_1 + (b_1 + b_2) \bar{P}_1 &= 0, \\ \dot{\bar{P}}_2 + \bar{P}_1 + (b_1 - b_2) \bar{P}_2 &= 0, \\ \bar{Q}_3 - \bar{P}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

und den Randbedingungen

$$\bar{Q}_1 = \bar{P}_2 = 0 \quad (\eta = 0), \quad \bar{Q}_2 = \bar{P}_1 = 0 \quad (\eta = 1). \quad (47)$$

Eliminieren wir aus (46) und (47) die Größen  $\bar{P}_1$ ,  $\bar{P}_2$ ,  $\bar{Q}_2$  und  $\bar{Q}_3$ , so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\ddot{\bar{Q}}_1 - 2(b_1^2 + b_2^2) \ddot{\bar{Q}}_1 - [\bar{\mu}_1 - (b_1^2 - b_2^2)] \bar{Q}_1 = 0 \quad (48)$$

mit den Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_1 &= 0, \\ \ddot{\bar{Q}}_1 - 2b_1 \dot{\bar{Q}}_1 &= 0, \end{aligned} \right\} (\eta = 0), \quad \left. \begin{aligned} \dot{\bar{Q}}_1 - (b_1 + b_2) \bar{Q}_1 &= 0, \\ \ddot{\bar{Q}}_1 - (b_1 + b_2) \ddot{\bar{Q}}_1 &= 0, \end{aligned} \right\} (\eta = 1). \quad (49)$$

Der übliche Exponentialansatz für  $\bar{Q}_1$  in (46) führt zu der Darstellung

$$\bar{Q}_1 = a \sin \alpha \eta + b \cos \alpha \eta + c \sin \beta \eta + d \cos \beta \eta \quad (50)$$

mit zunächst noch unbestimmten Konstanten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  sowie

$$\alpha = [(\bar{\mu}_1 + 4b_1^2 b_2^2)^{1/2} - (b_1^2 + b_2^2)]^{1/2} \quad \text{und} \quad \beta = [(\bar{\mu}_1 + 4b_1^2 b_2^2)^{1/2} + b_1^2 + b_2^2]^{1/2}. \quad (51)$$

Zur Bestimmung von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  erhalten wir durch Einsetzen von (50) in (49) das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2b_1\alpha & -\alpha^2 & -2b_1\beta & \beta^2 \\ [\alpha \cos \alpha & [-\alpha \sin \alpha & [\beta \cos \beta & [\beta \sin \beta \\ -(b_1 + b_2) \sin \alpha] & -(b_1 + b_2) \cos \alpha] & -(b_1 + b_2) \sin \beta] & -(b_1 + b_2) \cos \beta] \\ [-\alpha^3 \cos \alpha & [\alpha^3 \sin \alpha & [\beta^3 \cos \beta & [\beta^3 \sin \beta \\ +(b_1 + b_2) \alpha^2 \sin \alpha] & +(b_1 + b_2) \alpha^2 \cos \alpha] & -(b_1 + b_2) \beta^2 \sin \beta] & -(b_1 + b_2) \beta^2 \cos \beta] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0. \quad (52)$$

Die Forderung, daß die Determinante dieses homogenen Gleichungssystems für die Unbekannten  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $d$  verschwinden muß, führt nach einigen Vereinfachungen zu der Gleichung

$$b_2 \beta (4b_1^2 - \alpha^2 - \beta^2) \sin \alpha \cos \beta + (b_2^2 - b_1^2) (\alpha^2 + \beta^2) \sin \alpha \sin \beta + \alpha \beta (\alpha^2 + \beta^2) \cos \alpha \cos \beta - b_2 \alpha (4b_1^2 + \alpha^2 + \beta^2) \cos \alpha \sin \beta = 0. \quad (53)$$

Aus (53) und (51) lassen sich für ein vorgegebenes Wertepaar  $b_1, b_2$  die zugehörigen Werte  $\bar{\mu}_1, \alpha, \beta$  und damit unter Beachtung von (52) auch das Verhältnis  $a:b:c:d$  bestimmen. Aus (50) und (49), worin  $Q_1$  durch  $\bar{Q}_1$  zu ersetzen ist, kann dann  $\bar{Q}_1$  berechnet werden. Die übrigen Eigenfunktionen  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{Q}_2$  und  $\bar{Q}_3$  ergeben sich mit Hilfe von (46). Den später benötigten Wert  $\bar{\mu}_1^{1/4}/(2\pi)^{1/2}$  kann man in dem praktisch ausreichenden Bereich  $|b_1| \leq 2$ ,  $-1 \leq b_2 \leq 0$  mit 1% Genauigkeit<sup>1</sup> wie folgt darstellen:

$$\alpha = \frac{(\bar{\mu}_1)^{1/4}}{(2\pi)^{1/2}} = 0,62666 - 0,021315 b_1^2 + 0,0003161 b_1^4 + b_2 (0,006603 b_1^2 - 0,253976) + b_2^2 (0,001249 b_1^2 + 0,021801). \quad (54)$$

Die aus den Integralen

$$\left. \begin{aligned} \bar{J}_1 &= \int_0^1 (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 + \bar{P}_2 \bar{Q}_2) d\eta, & \bar{J}_2 &= \int_0^1 (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 - \bar{P}_2 \bar{Q}_2) d\eta, \\ \bar{K}_1 &= \int_0^1 \eta (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 + \bar{P}_2 \bar{Q}_2) d\eta, & \bar{K}_2 &= \int_0^1 \eta (\bar{P}_1 \bar{Q}_1 - \bar{P}_2 \bar{Q}_2) d\eta \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

<sup>1</sup> Die folgende Polynomapproximation (54) hat ebenso wie (84) für kleine Werte von  $|b_1|$ ,  $|b_2|$  bzw.  $|b_1^*|$ ,  $|b_2^*|$  wesentlich größere Genauigkeit als angegeben ist.

gebildeten später benötigten Quotienten  $\bar{K}_1/\bar{J}_1$  und  $\bar{K}_2/\bar{J}_2$  erweisen sich im Gebiete  $|b_1| \leq 2$  —  $1 \leq b_2 \leq 0$  als nahezu konstant. Zwecks Vereinfachung der später herzuleitenden Formeln werden daher diese Größen als konstant betrachtet. Wir setzen

$$C_1 = \frac{\bar{K}_1}{\bar{J}_1} = 0,625, \quad C_2 = \frac{\bar{K}_2}{\bar{J}_2} = 0,5. \quad (56)$$

d) Approximation des ersten Eigenwertes des Variationsproblems I durch den des Problems II. Um nun das Gleichungssystem (44), (45) angenähert nach  $b_1$  und  $b_2$  aufzulösen, setzen wir für  $\dot{h}_1$  und  $\dot{h}_2$  folgende abgebrochene Taylorreihen mit noch unbestimmten Größen  $c_1$  und  $c_2$  an:

$$\left. \begin{aligned} \dot{h}_1(\eta) &= \dot{h}_1(c_1) + \ddot{h}_1(c_1) (\eta - c_1), & 0 \leq c_1 \leq 1, \\ \dot{h}_2(\eta) &= \dot{h}_2(c_2) + \ddot{h}_2(c_2) (\eta - c_2), & 0 \leq c_2 \leq 1. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Durch Einsetzen von (57) in (44) und (45) erhalten wir unter Beachtung von (55) und (56)

$$b_1 = \dot{h}_1(c_1) + \ddot{h}_1(c_1) (C_1 - c_1), \quad (58)$$

$$b_2 = \dot{h}_2(c_2) + \ddot{h}_2(c_2) (C_2 - c_2). \quad (59)$$

Wir setzen nun  $c_1 = C_1$  und  $c_2 = C_2$  gemäß (56) und ersetzen außerdem die ersten Differentialquotienten durch Differenzenquotienten gemäß der Formel

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{1}{2 \Delta x} (f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)) + \dots \quad (60)$$

Darin beginnt das fortgelassene Glied erst mit der dritten Ableitung, die auch in (57) nicht berücksichtigt ist. Wählen wir in  $\dot{h}_1(\eta)$  als Schrittweite im Sinne von (60) die Größe  $\Delta\eta_1 = 1 - C_1$  und in  $\dot{h}_2(\eta)$  die Größe  $\Delta\eta_2 = 1 - C_2$ , so erhalten wir, wenn wir noch (56) beachten, die Näherungsformeln

$$b_1^* \approx \frac{h_1(1) - h_1(2 C_1 - 1)}{2 (1 - C_1)} = \frac{h_1(1) - h_1(0,25)}{0,75}, \quad (61)$$

$$b_2^* \approx \frac{h_2(1) - h_2(2 C_2 - 1)}{2 (1 - C_2)} = h_2(1) - h_2(0). \quad (62)$$

Berechnen wir zu diesen Werten  $b_1 = b_1^*$  und  $b_2 = b_2^*$  mit Hilfe von (54) den ersten Eigenwert  $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_1^*$  des zugehörigen Variationsproblems II, so gilt nach Abschnitt b)

$$\mu_1 \approx \bar{\mu}_1^*. \quad (63)$$

Für die rechnerische Auswertung von (61) ist es noch günstig zu wissen, welches  $\xi = (x/l)$ -Argument  $\xi = \xi_B$  zu dem  $\eta$ -Argument  $\eta = 0,25$  gehört. Da wegen (28) die Beziehung  $d\xi = dx/l = d\eta$  gilt, so wird wegen (34)

$$\eta = \frac{l}{J} \int_0^\xi \left( \frac{M}{K_B} \right)^{1/4} d\xi. \quad (64)$$

Bezeichnen wir den zu  $\xi = 0,25$  gehörigen  $\eta$ -Wert mit  $\eta_1$ , so wird

$$\eta_1 = \frac{l}{J} \int_0^{0,25} \left( \frac{M}{K_B} \right)^{1/4} d\xi. \quad (65)$$

Werten wir hierin das Integral nach der Trapezformel aus und  $J$  nach der Simpsonschen Regel, so wird mit den Bezeichnungen (1), (2), (3), (4)

$$\frac{J}{l} \approx B \left( \frac{M_M}{K_{BM}} \right)^{1/4} \quad (66)$$

und damit weiter

$$\eta_1 = \frac{1}{B} \left( \frac{B_0 + B_1}{2} \right) \cdot 0,25. \quad (67)$$

Interpolieren wir  $\eta$  als Funktion von  $\xi$  linear in dem Intervall  $0 \leq \xi \leq 0,25$ , so erhalten wir

$$\eta \approx \frac{1}{B} \left( \frac{B_0 + B_1}{2} \right) \xi. \quad (68)$$

Hieraus errechnet sich der zu  $\eta = 0,25$  gehörige Wert  $\xi = \xi_B$ , wie er in (5) angegeben ist. Dies unter der Voraussetzung  $0 \leq \xi_B \leq 0,25$  hergeleitete Beziehung wird auch noch gelten, falls  $\xi$  etwas größer als 0,25 wird.

Nun nehmen wir noch einige Umformungen vor, um auf die in Abschnitt 2 angegebene Form für die Berechnung der Grundbiegeeigenfrequenz zu kommen. Dazu setzen wir in (36)

$$e_1 = (K_{BM} M_M)^{-1}, \quad e_2 = M_M^{-1} K_{BM} \quad (69)$$

und führen die Bezeichnungen

$$(3 b_1^* \lg e)^2 = L_p, \quad (70)$$

$$8 b_2^* \lg e = L_q \quad (71)$$

ein. Damit geht (61) nach Quadrieren in (6) über und (62) in (7), wenn wir (36), (69), (1) und (2) beachten und außerdem uns erinnern, daß  $\eta = 0,25$  dem  $\xi$ -Wert  $\xi = \xi_B$  nach (5) entspricht. Bezeichnen wir die zu  $b_1 = b_1^*$ ,  $b_2 = b_2^*$  gehörigen Eigenwerte des Variationsproblems II mit  $\bar{\mu}_k^*$  und setzen zur Abkürzung

$$\frac{(\bar{\mu}_k^*)^{1/4}}{(2\pi)^{1/2}} = \alpha_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots), \quad (72)$$

so erhalten wir für  $k = 1$  bei Beachtung von (54), (70) und (71)

$$\alpha_1 = 0,62666 - 0,012556 L_p + 0,0001097 L_p^2 + L_q (-0,073100 + 0,0011195 L_p) + L_q^2 (0,001806 + 0,0000610 L_p) (\pm 1\%). \quad (73)$$

Tabulieren wir noch den von  $L_q$  unabhängigen Teil

$$F_1(L_p) = 0,62666 - 0,012556 L_p + 0,0001097 L_p^2, \quad (74)$$

so kommen wir zu der in (9) angegebenen Darstellung von  $\alpha_1$ . Aus (29), worin  $\lambda$  durch  $\lambda_k$  und  $\mu$  durch  $\mu_k$  zu ersetzen sind, sowie (20) erhalten wir

$$(2\pi f_{B, 2k-1, ex})^2 = \lambda_k = \kappa \mu_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (75)$$

Daraus folgt für  $k = 1$  wegen (63) und (72)

$$f_{B1, ex} \approx \sqrt{\kappa} \cdot \frac{\sqrt{\bar{\mu}_1^*}}{2\pi} = \sqrt{\kappa} \alpha_1^2. \quad (76)$$

Bezeichnen wir den erhaltenen Näherungswert für  $f_{B1, ex}$  mit  $f_{B1}$ , so erhalten wir schließlich unter Berücksichtigung von (33), (66) und (13) die Gleichung (14) für  $n = 1$ , womit die Gültigkeit dieser Formel für die Berechnung der Grundbiegeeigenfrequenz gezeigt ist.

**5. Herleitung der Näherungsformel (14) für die Oberbiegeeigenfrequenz  $f_{Bn}$  ungerader Ordnungszahl  $n$ .** Die aus den Eulerschen Gleichungen des Variationsproblems I nach (37) bis (40) herleitbare Differentialgleichung für  $Q_1$  hat — wie man leicht zeigt — dieselben Faktoren bei  $\ddot{Q}_1$  und  $Q_1$  wie die entsprechende Gleichung (48) für das Variationsproblem II bei  $\ddot{Q}_1$  und  $\bar{\mu}_1 \bar{Q}_1$ . Nach *Lehmann*<sup>1</sup> verhalten sich daher die zu den Problemen I und II gehörigen Eigenwerte  $\mu_k$  bzw.  $\bar{\mu}_k$  für  $k \rightarrow \infty$  in erster Näherung asymptotisch gleich, und zwar unabhängig davon, welche Werte die Größen  $b_1$  und  $b_2$  in dem Variationsproblem II haben.

Setzen wir nun in Variationsproblem II die Größen  $b_1$  und  $b_2$  gleich  $b_1^*$  bzw.  $b_2^*$  und bezeichnen die zugehörigen Werte mit  $\bar{\mu}_k^*$  ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ), so liegt es wegen des genannten asymptotischen Verhaltens nahe, die Beziehung (63) in folgender Weise zu erweitern:

$$\mu_k \approx \bar{\mu}_k^* \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \quad (77)$$

Diese Beziehung wird dann sowohl für  $k = 1$  als auch für  $k \rightarrow \infty$  recht gute Näherungswerte für die Eigenwerte  $\mu_k$  des Variationsproblems I liefern. Wegen der Einfachheit von (77) wollen wir diese Beziehung zur näherungsweise Berechnung von  $\mu_k$  für alle  $k$  benutzen und dabei in Kauf nehmen, daß diese Beziehung für kleinere Werte  $k > 1$  möglicherweise nur grobe Näherungswerte für  $\mu_k$  liefert. Zur Berechnung von  $\bar{\mu}_k^*$  für  $k > 1$  soll die folgende, aus (51) und (53) herleitbare asymptotische Beziehung (mit  $2k - 1 = n$ )

$$\alpha_n^2 = \frac{(\bar{\mu}_k^*)^{1/2}}{2\pi} = \frac{\pi}{8} n^2 + \frac{b_1^2}{2\pi} \left(1 - \frac{4}{n\pi}\right) + \frac{b_2^2 - 2b_2}{2\pi} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (78)$$

benutzt werden, in der dann  $b_1 = b_1^*$  und  $b_2 = b_2^*$  zu setzen sind.

Ebenso wie aus (63) die Beziehung (14) für  $n = 1$  hergeleitet wurde, läßt sich aus (77) die Beziehung (14) für  $n = 2k - 1$  ( $k = 2, 3, 4, \dots$ ) herleiten. Dabei geht (78) mit Hilfe von (70) und (71) in (11) über. Damit ist die Formel (14) für alle ungeraden  $n \geq 1$  hergeleitet.

<sup>1</sup> N. J. Lehmann, Wissenschaftl. Z. Techn. Hochsch. Dresden 2 (1952/53), Heft 3.



**6. Herleitung der Formel (14) für die Oberbiegeeigenfrequenzen  $f_{Bn}$  gerader Ordnungszahl  $n$ .** Die Eigenschwingungsformen, die zu den Eigenfrequenzen  $f_{Bn,ex}$  mit geradem  $n$  gehören, sind zu Balkenmitte antisymmetrisch. Daher sind sowohl das Biegemoment als auch die Durchbiegung in Balkenmitte, d. h. für  $x = l$ , gleich Null, und der bei  $x = l$  durchgeschnittene und bei  $x = 0$  und  $x = l$  gelenkig gelagerte Balken hat Eigenfrequenzen  $\hat{f}_{Br,ex}$  für die

$$\hat{f}_{Br,ex} = f_{B,2r,ex} \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \quad (74)$$

gilt. Es bleibt also die Aufgabe, Näherungswerte  $\hat{f}_{Br}$  für die Eigenfrequenzen  $\hat{f}_{Br,ex}$  eines bei  $x = 0$  und  $x = l$  gelenkig gelagerten Balkens zu bestimmen, der in  $0 \leq x \leq l$  dieselben Querschnittsgrößen hat, wie der von uns bisher betrachtete Balken. Die die antisymmetrische Schwingungsform darstellende Funktion  $w = w(x)$  genügt für  $0 \leq x \leq l$  natürlich auch der Variationsbedingung (17) sowie der Randbedingung (18). Die Bedingung (19) ist jedoch durch

$$w = 0 \quad (x = l) \quad (84)$$

zu ersetzen. Durch dieselben Transformationen wie in Abschnitt 4 a) kann dies Variationsproblem auf die Form (37) gebracht werden. Als Randbedingung ist außer (38) die Bedingung

$$Q_1 = 0 \quad (\eta = 1) \quad (85)$$

hinzuzufügen.

Um nun zu einfachen Näherungsformeln für die Eigenwerte dieses Problems zu kommen setzen wir in diesem Variationsproblem

$$\hat{h}_1 = b_1^*, \quad \hat{h}_2 = b_2^*, \quad (86)$$

wo  $b_1^*$  und  $b_2^*$  die Konstanten sind, die sich als Lösung von (44), (45) ergaben. Die Eigenwerte  $\hat{\mu}$  dieses vereinfachten Problems ergeben sich aus den folgenden Gleichungen, die in ähnlicher Weise hergeleitet sind, wie die Gleichungen (51) und (53):

$$\left. \begin{aligned} 8 b_1^{*2} \alpha \beta - [4 b_1^{*2} (\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2] \sin \alpha \sin \beta - 8 b_1^{*2} \alpha \beta \cos \alpha \cos \beta &= 0, \\ \beta^2 - \alpha^2 &= 2 (b_1^{*2} + b_2^{*2}), \\ \hat{\mu}_r^* &= \frac{1}{4} (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 4 b_1^{*2} b_2^{*2}. \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

Die Lösungen dieser Gleichungen können im Intervall

$$|b_1^*| \leq 2, \quad -1 \leq b_2^* \leq 0$$

wie folgt approximiert werden:

$$\alpha_2 = \frac{(\hat{\mu}_1)^{1/4}}{(2\pi)^{1/2}} = 1,25331 - 0,024651 b_1^{*2} + 0,0001695 b_1^{*4} + (0,063674 - 0,000370 b_1^{*2}) b_2^{*2} (\pm 0,15\%) \quad (88)$$

und mit  $2r = n$  ( $r = 2, 3, 4, \dots$ )

$$\alpha_n^2 = \frac{(\hat{\mu}_r)^{1/2}}{2\pi} = \frac{\pi}{8} n^2 + \frac{b_1^{*2}}{2\pi} \left(1 - \frac{8}{n\pi}\right) + \frac{b_2^{*2}}{2\pi} + 0 \left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (89)$$

Die Eigenfrequenzen  $\hat{f}_{Br}$  des durch (82) vereinfachten Systems berechnen sich damit, wie man ähnlich wie in den Abschnitten 4d) und 5 schließt, zu

$$\hat{f}_{Br} = \frac{\alpha_n^2}{B^2 l^2} \sqrt{\frac{K_M}{M_M}} \quad \left(\frac{n}{2} = r = 1, 2, 3, \dots\right) \quad (90)$$

Setzt man nun

$$\hat{f}_{Br,ex} \approx \hat{f}_{Br}, \quad (91)$$

so gilt (87) exakt, wenn (82) exakt erfüllt ist. Allgemein gilt (87) wenigstens in erster Näherung asymptotisch. Um zu einer einfachen Formel zu kommen, wollen wir (87) als unsere Näherungsformel ansehen. Führen wir in (84) und (85) noch die Transformation (70) und (71) ein, so erhalten wir (10) bzw. (12). Damit haben wir, wenn wir noch (79), (86) und (87) zusammenfassen die Gleichung (14) auch für gerade  $n > 0$  hergeleitet.

**7. Balken, für die die Näherungsformel (14) exakte Werte ergibt.** Zur Herleitung der Näherungsformel (14) dieser Arbeit wurde die Gleichung (37) durchweg durch die Annahme (82) vereinfacht. Bis auf die geringen Fehler, die durch die Polynomapproximationen der  $\alpha_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) mittels der Gleichungen (9) bis (12) entstehen, liefert (14) also exakte Werte, wenn (82) für den Balken exakt erfüllt ist.

Die Massen- und die Steifigkeitsverteilung eines derartigen Balkens erhält man durch Integration von (82), wenn man noch (36), (28) und (34) beachtet. Läßt man noch den Stern bei den nunmehr beliebigen Konstanten  $b_1$  und  $b_2$  fort, so ergeben sich die Querschnittsgrößen  $M$  und  $K_B$  der Balken, deren Eigenfrequenzen durch (14) (nahezu) exakt geliefert werden, wie folgt:

a) Falls  $b_2 \neq 0$  ist,

$$K_B = K_{BM} e^{4b_2 - 2b_1} [1 - (1 - e^{-2b_2}) \xi]^{2 - \frac{b_1}{b_2}}, \quad M = M_M e^{-4b_2 - 2b_1} [1 - (1 - e^{-2b_2}) \xi]^{-2 - \frac{b_1}{b_2}} \tag{88}$$

und

b) falls  $b_2 = 0$  ist,

$$K_B = K_{BM} e^{-2b_1(1-\xi)}, \quad M = M_M e^{-2b_1(1-\xi)}. \tag{89}$$

Es sei darauf hingewiesen, daß alle diese Massen- und Steifigkeitsverteilungen einen monotonen Verlauf haben. — Die Berechnung der Eigenfrequenzen für die Balken mit den Querschnittswerten nach (88) oder (89) mit Hilfe von (14) kann noch dadurch vereinfacht werden, daß man die benötigten  $\alpha_n$ -Werte nicht aus (9) bis (12) berechnet, sondern aus den Gleichungen (54) und (78) sowie aus (84) und (85), wo in den beiden letzten noch  $b_1^*$  und  $b_2^*$  durch  $b_1$  bzw.  $b_2$  zu ersetzen sind.

**8. Bemerkung über Balken mit unsymmetrischem Querschnittsverlauf.** Bei Balken mit unsymmetrischem Querschnittsverlauf kann man zunächst ganz ähnlich vorgehen wie in Abschnitt 4 bei dem symmetrischen Balken. Dies wurde bereits in Abschnitt 6 angedeutet. Bei der Wahl der Parameter  $b_1$  und  $b_2$  wurde jedoch eine Schwierigkeit bewußt umgangen: Diese Parameter wurden in Abschnitt 6 einfach gleich den für den symmetrischen Fall berechneten Werten  $b_1^*$  bzw.  $b_2^*$  gesetzt. Das waren jedoch keineswegs optimale Werte für den unsymmetrischen Fall in dem Sinne, wie es  $b_1^*$  und  $b_2^*$  für den symmetrischen Fall waren. Eine in diesem Sinne optimale Wahl ist im unsymmetrischen Falle leider nicht möglich, da die Größen, die  $C_1$  und  $C_2$  nach (56) entsprechen würden, für den unsymmetrischen Balken auch nicht annähernd konstant sind. Für den unsymmetrischen Balken ist offenbar eine Vereinfachung des Variationsproblems in der Art (82) zu einschneidend; eine Approximation der gegebenen Differentialgleichung durch eine solche mit nicht oder nur teilweise konstanten Koeffizienten wäre wünschenswert gewesen. Eine solche Approximation wurde jedoch wegen des zu erwartenden Arbeitsaufwandes nicht in Angriff genommen.

Bei dem symmetrischen Balken konnten wir diese Schwierigkeit dadurch umgehen, daß wir nur eine Hälfte betrachteten. Dadurch bekam  $Q_1$  an dem einen Ende des betrachteten Balkenteils seinen Kleinstwert und an dem anderen Ende seinen Größtwert. Diese Eigenschaft von  $Q_1$  muß vermutlich zumindest angenähert vorhanden sein, damit unser hier benutztes allgemeines Verfahren zur Herleitung von Näherungsformeln mit Erfolg angewandt werden kann. Das zeigt jedenfalls die Erfahrung sowohl in der vorliegenden Arbeit als auch bei den Herleitungen von Näherungsformeln in den vier früheren Arbeiten des Verfassers. Der Grund ist kurz gesagt folgender: Umfaßt die durch  $Q_1$  dargestellte Schwingungsform mehr als „eine Viertelperiode einer sinusförmigen Schwingung“, so treten in den „Gewichtsfunktionen“ bei  $\dot{h}_1$  und  $\dot{h}_2$  in (44) bzw. (45) Vorzeichenwechsel auf, die die Auflösung dieser Gleichungen nach  $b_1$  und  $b_2$  erschweren oder gar unmöglich machen.

**9. Schluß.** Die in der vorliegenden Arbeit gegebene Herleitung einer Näherungsformel für die Biegeeigenfrequenzen eines an beiden Enden gelenkig gelagerten Balkens, dessen Querschnittsgrößen zur Mitte zwischen den Auflagern symmetrisch sind, zeigte in einem weiteren Beispiele die Brauchbarkeit eines früher vom Verfasser entwickelten allgemeinen Verfahrens<sup>1</sup> zur Aufstellung von Näherungsformeln für die Eigenwerte selbstadjungierter Differentialgleichungen. Eine Fehlerabschätzung, wie etwa für die Näherungsformel für Torsionseigenfrequenzen<sup>2</sup>, wurde für die hergeleitete Formel nicht gegeben, Ihre Brauchbarkeit konnte jedoch an Beispielen gezeigt werden.

Bemerkenswert ist, daß die erwähnte allgemeine Methode nicht ohne weiteres auf den nicht zur Mitte symmetrischen Balken angewandt werden kann. Aus diesem Grunde konnten in dieser Arbeit für die Biegeeigenfrequenzen  $f_{Bn,ex}$  gerader Ordnung  $n$  nicht so genaue Näherungsformeln angegeben werden wie für die Frequenzen ungerader Ordnung.

(Eingegangen am 14. Juni 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. H. Wittmeyer, Linköping (Schweden), Valkebogatan 14 A

<sup>1</sup> Siehe Fußnote 4 von Seite 117.  
<sup>2</sup> Siehe Fußnote 1 von Seite 117.

# Weiterführung der Sobreroschen Theorie des ebenen Spannungszustandes\*

Von W. Engl

**1. Einführung in die Behandlung des ebenen Spannungszustandes mittels hyperkomplexer Funktionen.** Wir stellen zunächst kurz die Ergebnisse der für den zu behandelnden Gegenstand grundlegenden Arbeit von L. Sobrero<sup>1</sup> zusammen. Wenn man Lösungen  $f(x, y)$  der Gleichung

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

sucht und den Ansatz  $f(x, y) = f(x + i y)$  macht, so findet man, daß die Konstante  $i$  der Gleichung  $1 + i^2 = 0$  genügen muß. Man stellt fest, daß für analytische Funktionen gilt  $f(x + i y) = u(x, y) + i v(x, y)$  mit  $\Delta u = \Delta v = 0$ .

Sucht man die Bipotentialgleichung

$$\Delta \Delta f \equiv \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} = 0 \quad (1)$$

ebenfalls mit einer Funktion  $f(x, y)$  der linearen Kombination  $z = x + j y$  zu befriedigen:

$$f(x, y) = f(x + j y), \quad (2)$$

so findet man, daß die Konstante  $j$  der Gleichung

$$1 + 2j^2 + j^4 = 0 \quad (3)$$

genügen muß. Für analytische Funktionen erhält man

$$f(x + j y) = a(x, y) + j b(x, y) + j^2 c(x, y) + j^3 d(x, y) \quad (4)$$

mit

$$\Delta \Delta a = \Delta \Delta b = \Delta \Delta c = \Delta \Delta d = 0. \quad (5)$$

Die den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen entsprechenden Regularitätsbedingungen lauten:

$$a_y = -d_x, \quad b_y = a_x, \quad c_y = b_x - 2d_x, \quad d_y = c_x. \quad (6)$$

Weiter läßt sich der Cauchysche Integralsatz beweisen: Ist  $f(z)$  in einem einfach zusammenhängenden Gebiet überall regulär, so gilt:

$$\oint_C f(z) dz = 0. \quad (7)$$

Aus diesem Fundamentalsatz folgt wie in der Funktionentheorie die Cauchysche Integralformel und die Entwickelbarkeit einer in einem Kreisringgebiet definierten Funktion in eine Laurentsche Reihe. Vergleicht man die Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustandes bei Vernachlässigung der Massenkraften

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

mit den Cauchyschen Bedingungen (6) für die Funktion

$$f(z) = a + j b + j^2 c + j^3 d,$$

so sieht man, daß die beiden Gleichungen, welche  $b$  nicht enthalten, mit den Gleichgewichtsbedingungen identisch sind, wenn man nur  $\sigma_x$  für  $-c$ ,  $\sigma_y$  für  $a$  und  $\tau$  für  $d$  schreibt.

Die Elemente  $a$ ,  $c$  und  $d$  erfüllen also die Gleichgewichtsbedingungen und sind außerdem Bipotentialfunktionen. Diese beiden Bedingungen sind gerade notwendig und hinreichend, um die Elemente  $a$ ,  $c$  und  $d$  als Spannungskomponenten zu charakterisieren.

Besonders wichtig ist noch die physikalische Bedeutung des Integrals. Bezeichnen wir mit  $dP_x$  und  $dP_y$  die Komponenten der äußeren Kraft, die längs des Randstückes  $d\bar{s}$  angreift, so gilt

$$d\bar{s} = dx + j dy, \quad -dP_x = \tau dx - \sigma_x dy, \quad -dP_y = \sigma_y dx - \tau dy. \quad (9)$$

\* Auszug aus der gleichnamigen Dissertation des Verfassers, München 1953. Erster Berichterstatter Prof. Dr. G. Hettner, zweiter Berichterstatter Prof. Dr. L. Föppl.

<sup>1</sup> L. Sobrero, Theorie der ebenen Elastizität, Hamburger Mathematische Einzelschriften, Heft 17, Leipzig 1934.

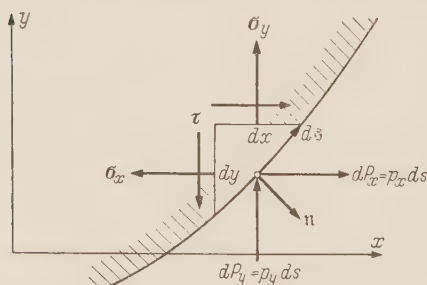


Abb. 1. Gleichgewicht an einem Element des Randes.



Wenn man andererseits mit  $f(z)$  die hyperkomplexe Funktion bezeichnet, welche die elastische Beanspruchung des Punktes  $z$  darstellt und  $dz = dx + j dy$  das entsprechende hyperkomplexe Differential nennt, so hat man

$$f(z) dz = (\sigma_y + j b - j^2 \sigma_x + j^3 \tau) (dx + j dy) = (\sigma_y dx - \tau dy) + \dots + j^3 (\tau dx - \sigma_x dy) = -dP_y + \dots + j^3 (-dP_x), \quad (10)$$

wobei die Punkte einige Glieder ersetzen, die für unsere Betrachtungen nicht von Interesse sind, da sie die Größe  $b$  enthalten, der keine physikalische Bedeutung zukommt. Geht man von infinitesimalen zu den endlichen Größen über, so sieht man hieraus: Das erste und das letzte Element des Integrals  $\int_A^B f(z) dz$  stellen die Komponenten  $-P_y$  und  $-P_x$  der äußeren Kraft dar. Wenn die Integrationskurve geschlossen ist und in das von ihr berandete Gebiet keine Singularität der Funktion  $f(z)$  fällt, so ist das Integral gleich Null. Andererseits ist schon jetzt einzusehen, daß Singularitäten für die Funktion  $f(z)$  nur dort existieren können, wo Angriffspunkte der äußeren Kräfte liegen. Man kann also schließen, daß der Satz von *Cauchy* folgendem physikalischen Sachverhalt entspricht: Wenn in irgendwelchem Bereiche eines ebenen Systems keine äußere Kraft angreift, so stehen die am Rande dieses Bereiches angreifenden Spannungen im Gleichgewicht. Ist die Integrationskurve geschlossen und fällt in das von ihr umschlossene Gebiet ein Angriffspunkt einer äußeren Kraft (und deshalb eine Singularität für die Funktion  $f(z)$ ), so verschwindet das Integral  $\int_A^B f(z) dz$  nicht mehr, und seine äußersten Elemente stellen eben die Komponenten  $-P_y$  und  $-P_x$  der angreifenden Kraft dar. Damit ist der Residuumbegriff physikalisch gedeutet. Auch das Integral

$$M(z_0) = -\int_A^B (z - z_0) f(z) dz = -\int_A^B [(x - x_0) dP_y - (y - y_0) dP_x] + j \dots \quad (11)$$

hat eine wichtige physikalische Bedeutung:  $z_0 = x_0 + j y_0$  ist hier ein beliebiger Punkt des ebenen Systems. Es ist nämlich das erste Element des Integrals  $M(z_0)$  gleich dem Moment der Spannungen bezüglich des Punktes  $z_0$ .

**2. Die hyperkomplexe Spannungsfunktion.** *Sobrero* beschränkt sich in seiner Arbeit auf diejenigen Spannungszustände, bei denen der Rand lastfrei ist. Die Belastungen greifen also stets im Innern der Bereiche an. In den Anwendungen ist jedoch der Fall, daß die Ränder belastet sind, der häufigere. Allerdings tritt hierbei eine für unseren Problemkreis charakteristische Schwierigkeit auf. Betrachten wir zum Beispiel die Normalspannungen längs eines Randes, der an einem Punkt durch eine Einzelkraft belastet ist, so sind diese überall Null, wenn die Kraft die Richtung der Normalen hat, ausgenommen an ihrem Angriffspunkt, wo sie unendlich werden. Soll nun die Funktion  $f(z)$  diesen Spannungszustand beschreiben, so muß sie auf dem Rand ihres Regularitätsgebietes unstetig sein. Der *Cauchy*sche Integralsatz besagt nun, daß  $\int_a^b f(z) dz$  unabhängig von dem die beiden Punkte verbindenden Integrationsweg  $C$  ist, wenn  $C$  ganz im Regularitätsgebiet von  $f(z)$  liegt, aber auch dann noch, wenn  $C$  mit dem Rand des Gebietes zusammenfällt, vorausgesetzt, daß  $f(z)$  auf dem Rand stetig ist. In dem genannten Beispiel der Einzelkraft wird die Gültigkeit dieses Satzes auf dem Rande durchbrochen. Hierin liegt die mathematische Wurzel für die Einführung der Spannungsfunktion  $\Phi(z)$ , welche die Unstetigkeit am Rande hebt.

Wir beweisen den folgenden Satz: Das erste Element einer hyperkomplexen Funktion  $\Phi(z)$  stellt die *Airysche* Funktion  $F(x, y)$  eines ebenen Spannungszustandes dar. Die Spannungen erhält man durch die zweite Ableitung der Funktion  $\Phi(z)$ . Denn es ist

$$\Phi(z) = F + j b + j^2 c + j^3 d$$

und also

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} = F_{xx} + j b_{xx} + j^2 c_{xx} + j^3 d_{xx}.$$

Es gelten nun die Regularitätsbedingungen

$$\text{danach ist} \quad c_x = d_y, \quad c_y = b_x - 2d_x, \quad F_x = b_y, \quad F_y = -d_x;$$

$$\text{Wir erhalten damit} \quad c_{xx} = d_{xy} = d_{yx} = -F_{yy}, \quad d_{xx} = -F_{yx}.$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dz^2} = F_{xx} + j b_{xx} - j^2 F_{yy} - j^3 F_{xy} = \sigma_y + j b_{xx} - j^2 \sigma_x + j^3 \tau$$

zufolge der bekannten Beziehung für die *Airysche* Funktion

$$\sigma_x = F_{yy}, \quad \sigma_y = F_{xx}, \quad \tau = -F_{xy}.$$

Wir fassen kurz zusammen:  $\Phi(z) = F(x; y) + j \dots$ , (12)

$$(\sigma) = \frac{d^2\Phi}{dz^2} = \sigma_y + j \dots - j^2 \sigma_x + j^3 \tau. \quad (13)$$

Wir benützen im Folgenden das Symbol  $(\sigma)$  für die Gesamtheit der Spannungskomponenten und nennen den Ausdruck „hyperkomplexe Spannung“. Man beachte auch die Analogie mit der komplexen Behandlung ebener Potentialströmungen, wo der Realteil des komplexen Potentials das Strömungspotential angibt. Die erste Ableitung liefert dort die konjugierte Geschwindigkeit. Bei uns tritt an Stelle der ersten Ableitung die zweite, da die Differentialgleichung von vierter Ordnung ist.

Es müssen noch die Randbedingungen für die Funktion  $\Phi$  aufgestellt werden. Dabei knüpfen wir an Gleichung (9) und (10) an:

$$(\sigma) dz = d\left(\frac{d\Phi}{dz}\right) = -dP_y + j \dots - j^3 dP_x = -p_y ds + j \dots - j^3 p_x ds,$$

wenn  $p_x(s)$  und  $p_y(s)$  die Lastdichte als Funktion der Bogenlänge der Randkurve  $(C)$  angeben:

$$\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{Rand} = -\int_0^s p_y(s) ds - C_2 + j \dots - j^3 \left(\int_0^s p_x(s) ds + C_1\right). \quad (14)$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$P_x = \int_0^s p_x(s) ds + C_1, \quad P_y = \int_0^s p_y(s) ds + C_2, \quad (15)$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{Rand} = -P_y + j \dots - j^3 P_x. \quad (16)$$

Der Zusammenhang zwischen (16) und der Airyschen Funktion ist leicht herzustellen:

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} + j \dots - j^3 \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{Rand} = -P_y, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{Rand} = P_x. \quad (18)$$

Wir können nun die beiden Komponenten  $P_x$  und  $P_y$  in (16) noch zu einem vom Koordinatensystem unabhängigen Ausdruck vereinigen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{Rand} [\cos(nx) + j \cos(ny)] &= (\mathfrak{P} \times \mathfrak{n})_{\perp} + j \dots = -P_y \cos(nx) + P_x \cos(ny) + j \dots \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{Rand} + j \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Dabei haben wir die Größen  $P_x$  und  $P_y$  zu dem Vektor  $\mathfrak{P}$  zusammengefaßt. Das Zeichen  $\perp$  bedeutet, daß die bezeichnete Vektorkomponente zu einer Koordinatenachse gehört, die senkrecht auf der  $(x, y)$ -Ebene steht. Um die Vektorschreibweise zu legitimieren, werden wir später den Nachweis für den Vektorcharakter der Größen  $P_x$  und  $P_y$  führen. Schließlich errechnet sich der Wert von  $\Phi$  auf dem Rande zu

$$d\Phi_{Rand} = (-P_y + j \dots - j^3 P_x) dz_{Rand} = P_x dy - P_y dx + j \dots = dF + j \dots$$

Die Punkte deuten die restlichen Elemente an, in denen  $P_x$  und  $P_y$  zufolge der Produktbildung mit Gliedern gekoppelt sind, denen eine unmittelbare physikalische Bedeutung nicht zukommt. Diese Elemente werden bis auf unwesentliche Konstante durch reine Quadraturen aus den Regularitätsbedingungen erhalten.

Die Formel

$$\Phi_{Rand} = \int_{(C)} (P_x dy - P_y dx) + C_3 + j \dots, \quad (20)$$

kann ebenfalls in eine vom Koordinatensystem unabhängige Form gebracht werden:

$$\Phi_{Rand} = \int_{(C)} (\mathfrak{P} \mathfrak{n}) ds + C_3 + j \dots = F_{Rand} + j \dots \quad (21)$$

Der erwähnte Nachweis des Vektorcharakters von  $\mathfrak{P}$  knüpft an Gleichung (9) an

$$\left. \begin{aligned} dP_x &= p_x ds = \sigma_x dy - \tau dx = [\sigma_x \cos(nx) + \tau \cos(ny)] ds, \\ dP_y &= p_y ds = \tau dy - \sigma_y dx = [\tau \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny)] ds, \\ p_x &= \sigma_x \cos(nx) + \tau \cos(ny), \\ p_y &= \tau \cos(nx) + \sigma_y \cos(ny). \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die rechten Seiten der Gleichung (22) zeigen Vektorcharakter, sie stellen die Multiplikation des Spannungstensors  $\sigma$  mit dem Einheitsvektor der Normalen dar. Damit ist die Schreibweise der Gleichung (19) und (21) gerechtfertigt.

Zu den in den Randbedingungen auftretenden Konstanten sei noch bemerkt, daß sie bei einfach zusammenhängendem Rand Null gesetzt werden können. Der analytische Charakter der

Airyschen Spannungsfunktion wird sehr schön aus der Tatsache sichtbar, daß die ihr zugeordnete hyperkomplexe Spannungsfunktion im gesamten Bereich (Gebiet und Rand) regulär ist.

3. Die Zerlegungsformel für hyperkomplexe Funktionen. Jede hyperkomplexe Zahl

läßt sich in die Form bringen

$$z = x + j y + j^2 u + j^3 v$$
$$z = \alpha + \omega \beta,$$

(23)

wo  $\alpha$  und  $\beta$  gewöhnliche komplexe Zahlen bedeuten. Diese Darstellung verdankt man *Levi-Civita*. Dabei wollen wir von der Bedeutung der komplexen Einheit als Richtgröße in der *Gaußschen* Zahlenebene absehen und nichts weiter darunter verstehen, als die Wurzeln aus  $-1$ . In der Tat rechnet man leicht nach, daß

$$\sqrt{-1} = i = \frac{3 j + j^3}{2}$$

ist, also

$$i^2 = \left(\frac{3 j + j^3}{2}\right)^2 = \frac{9 j^2 + 6 j^4 + j^6}{4} = \frac{9 j^2 - 6 - 12 j^2 - j^2 + 2 + 4 j^2}{4} = -1.$$

Die Größe  $1 + j^2$  definiert man als hyperkomplexe Nebeneinheit:

$$1 + j^2 = \omega.$$

(24)

Zufolge der hyperkomplexen Grundrelation verschwindet deren Quadrat

$$\omega^2 = (1 + j^2)^2 = 1 + 2 j^2 + j^4 = 0.$$

(25)

Den Beweis für die Möglichkeit der Darstellung  $z = \alpha + \omega \beta$ , den man durch Ausrechnen und Koeffizientenvergleich leicht führt, zeigen wir nur für den wichtigsten Fall der speziellen Zahl  $z = x + j y$ :

$$z = \alpha + \omega \beta = (x + i y) + \omega \left(-\frac{i y}{2}\right) = x + \frac{3 j + j^3}{2} y - \frac{3 j + j^3}{2}.$$
$$(1 + j^2) \frac{y}{2} = x + \frac{3}{2} j y - (j + j^3) \frac{y}{2} + \frac{j^3}{2} y = x + j y.$$

Augenscheinlich bezweckt diese Darstellung eine Vereinfachung der Rechnung; denn statt der komplizierten Rechenoperation mit hyperkomplexen Einheiten (z. B. Division) rechnet man bequem und in bekannter Weise mit komplexen Zahlen und mit einer hyperkomplexen Nebeneinheit, deren Quadrat Null ist, die sich also wie eine kleine Größe verhält.<sup>1</sup> Dieser Vorteil zeigt sich vor allem, wenn wir eine Funktion einer hyperkomplexen Veränderlichen betrachten. Die *Levi-Civitasche* Darstellung der hyperkomplexen Zahl läßt dabei wichtige Verallgemeinerungen zu.  $\Phi(z)$  sei im Gebiet  $G$ , welches den Nullpunkt enthalten soll, regulär und im Nullpunkt selbsteventuell auch singular; dann läßt sie sich auf eine und nur eine Weise in eine *Laurent* reiheentwickeln:

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} (\alpha + \omega \beta)^{\nu} = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} \left(\alpha^{\nu} + \omega \beta^{\nu} \alpha^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} \alpha^{\nu-2} (\omega \beta)^2 + \dots\right)$$
$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} \alpha^{\nu} + \omega \beta \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} \nu \alpha^{\nu-1} = \Phi(\alpha) + \omega \beta \Phi'(\alpha).$$

Diese Zerlegungsformel besagt: Jede analytische Funktion  $\Phi(z)$  der hyperkomplexen Veränderlichen  $z = x + j y + j^2 u + j^3 v = \alpha + \omega \beta$  läßt sich zerlegen in

$$\Phi(z) = \Phi(\alpha) + \omega \beta \Phi'(\alpha).$$

(26)

Dabei bedeutet  $\Phi(\alpha)$  dieselbe Funktion  $\Phi$ , jedoch mit der komplexen Veränderlichen

$$\alpha = (x - u) + i (y - v)$$

(27)

als Argument,  $\omega$  die hyperkomplexe Nebeneinheit  $1 + j^2$  und  $\beta$  die komplexe Zahl

$$\beta = u + i \frac{3 v - y}{2}.$$

(28)

Ebenso beweist man durch Reihenentwicklung: Die Ableitung der analytischen Funktion  $\Phi(z) = \Phi(\alpha) + \omega \beta \Phi'(\alpha)$  ist gegeben durch

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{d\Phi}{d\alpha} + \omega \beta \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2}.$$

(29)

Das unbestimmte Integral von  $\Phi(z)$  lautet

$$\int \Phi(z) dz = \int \Phi(\alpha) d\alpha + \omega \beta \Phi(\alpha) + C.$$

(30)

Man kann aus zwei komplexen Funktionen  $\Phi(\alpha)$  und  $\Psi(\alpha)$  die allgemeinste hyperkomplexe Funktion

$$\Phi(z) + \omega \Psi(z)$$

(31)

<sup>1</sup> Häufig gebraucht werden

$$i \omega = j \omega = j + j^3 \quad \text{und} \quad i j = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} j^2 = -1 + \frac{\omega}{2}.$$



erzeugen. Der Beweis erfolgt durch Zerlegung in die Elemente, welche die Form der allgemeinsten Bipotentialfunktion haben. Die in diesem Abschnitt abgeleiteten Formeln ergeben den Zusammenhang zwischen den Funktionen einer hyperkomplexen Veränderlichen und den gewöhnlichen komplexen Funktionen.

**4. Polynome zur Lösung verschiedener Belastungsfälle des geraden Balkens.** Bei der Anwendung der in Ziff. 2 aufgestellten hyperkomplexen Spannungsfunktion geht man zunächst von einfachen Funktionen aus und sieht nach, welcher Spannungszustand von ihnen dargestellt wird. Dabei erhält man das einfache Ergebnis, daß die bekannten Lösungen<sup>1</sup> für Belastungsfälle des geraden Balkens durch Polynome dargestellt werden.  $C$  bedeutet jeweils eine hyperkomplexe Konstante, welche aus den Randbedingungen bestimmt wird.

Reiner Zug:  $\Phi = C z^2$ , (32)

reine Biegung:  $\Phi = C z^3$ , (33)

Last am eingespannten Balken:  $\Phi = \sum_{\lambda=2}^4 C_{\lambda} z^{\lambda}$ , (34)

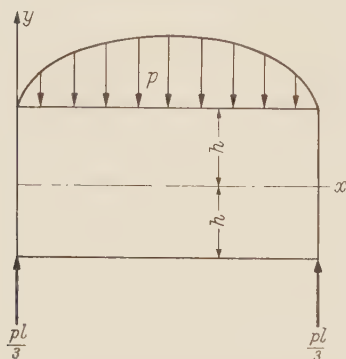


Abb. 2. Beiderseits frei aufliegender Balken mit parabelförmiger Lastverteilung.

beiderseits frei aufliegender, gleichmäßig belasteter Balken:

$$\Phi = \sum_{\lambda=2}^5 C_{\lambda} z^{\lambda}, \quad (35)$$

beiderseits frei aufliegender Balken mit Dreiecksbelastung:

$$\Phi = \sum_{\lambda=2}^6 C_{\lambda} z^{\lambda}, \quad (36)$$

beiderseits frei aufliegender Balken mit parabelförmiger Lastverteilung:

$$\left. \begin{aligned} p_y &= \frac{4p}{l^2} x(x-l), \\ \Phi &= \sum_{\lambda=2}^7 C_{\lambda} z^{\lambda}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Nachdem der letzte Fall bisher noch nicht gelöst wurde, soll er ausführlich beschrieben werden.

Wir stellen zunächst die Randbedingungen für  $\Phi$  auf. Den Nullpunkt der Randkurve legen wir an die Stelle  $x=0, y=-h$  und durchlaufen von hier aus dem Rand im positiven Sinne. Die erste Teilstrecke ist lastfrei, demnach gilt<sup>2</sup>:

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)_{z=x-jh} &= \dots + j^3 \cdot 0 \\ \Phi(x-jh) &= 0 + j \dots \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (0 \leq x \leq l) \\ (y = -h); \end{aligned} \quad (38)$$

$$\Phi(x-jh) = 0 + j \dots \quad (y = -h); \quad (39)$$

es folgt die Gerade  $x=l; -h \leq y \leq h$ .

Bekanntlich haben wir keine strenge Lösung in dem Sinne zu erwarten, daß die Normalspannungen für  $x=0$  und  $x=l$  verschwinden, sondern nur eine Lösung im Sinne des *de Saint-Venant*-schen Prinzips. Danach ergeben die Normalspannungen keine resultierende Normalkraft und kein resultierendes Moment; das Integral über die Schubspannungsverteilung wird dabei gleich der Auflagerkraft.

Das heißt nun aber, daß wir längs der Geraden nichts vorschreiben, sondern nur an deren Endpunkt  $x=l, y=h$  die für das Fortschreiten in mathematischem Umlauf erforderlichen Konstanten errechnen müssen.

Am belasteten Rand lauten die Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d\Phi}{dz} \right)_{z=x+jh} &= \dots + j^3 \cdot 0 \\ \Phi(x+jh) &= \frac{2p}{3l^2} \left( \frac{x^4}{2} - lx^3 \right) + \frac{pl}{3} x + j \dots \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} (y=h) \\ (0 \leq x \leq l). \end{aligned} \quad (40)$$

$$\Phi(x+jh) = \frac{2p}{3l^2} \left( \frac{x^4}{2} - lx^3 \right) + \frac{pl}{3} x + j \dots \quad (0 \leq x \leq l). \quad (41)$$

Für das letzte Stück des Randes  $x=0, h \leq y \leq -h$  brauchen wir nichts vorzuschreiben.

Den Ansatz (37) für  $\Phi$  müssen wir noch durch eine lineare Funktion in  $z$  und eine Konstante ergänzen, da wir die Konstanten in den Randbedingungen des lastfreien Randes gleich Null gesetzt haben:

$$\Phi = \sum_{\lambda=0}^7 C_{\lambda} z^{\lambda}, \quad (42)$$

<sup>1</sup> L. Föppl, Drang und Zwang, Bd. 3, München 1947.

<sup>2</sup> Siehe (19) und (21) und beachte den Faktor  $j$  auf der linken Seite von (19).

wobei die  $C_\lambda$  von der hyperkomplexen Form

$$C_\lambda = C_{\lambda 1} + j\, C_{\lambda 2} + j^2\, C_{\lambda 3} + j^3\, C_{\lambda 4} \tag{43}$$

sind.

Wir haben also zunächst die erschreckende Zahl von  $8 \cdot 4 = 32$  Konstanten. Nun kann man aber

$$C_{82} = C_{83} = C_{84} = C_{72} = C_{73} = C_{62} = 0 \tag{44}$$

setzen, da sie zum ersten Element von  $\Phi$  keinen Beitrag liefern. Weiter überlegt man sich, daß das erste Element von  $\Phi$  keine höhere Potenz in  $x$  als die vierte enthalten darf, da auch in den Randbedingungen für  $\Phi$  keine höhere vorkommt. Zufolge dieser Bedingung erhält man

$$C_{31} = C_{21} = C_{24} = C_{11} = C_{13} = C_{14} = 0 \, . \tag{45}$$

Somit haben wir die Zahl der Konstanten auf 20 reduziert. Wir zählen jetzt die Anzahl der aus den Randbedingungen folgenden Gleichungen ab: Schreiben wir mit unserem Ansatz die Gleichung (41) an und führen von  $x^4$  bis  $x^0$  einen Koeffizientenvergleich durch, so erhält man 5 Gleichungen. Ebenso verfährt man mit Gleichung (38), (39) und (40); das ergibt zusammen 20 Gleichungen. Die Auflösung dieser 20 Gleichungen läßt sich nun in endlicher Zeit bewältigen, und man erhält die hyperkomplexe Spannungsfunktion

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{p}{h^3 l^2} & \left\{ \frac{j}{420} z^7 - \frac{j l}{120} z^6 - \left( j \frac{2 h^2}{25} + j^3 \frac{h^2}{20} \right) z^5 + \left[ \frac{h^3}{6} + j \left( \frac{l^3}{48} + \frac{h^2 l}{5} \right) + j^3 \frac{h^2 l}{8} \right] z^4 \right. \\ & \left. - \left( \frac{h^3 l}{3} + j \frac{227 h^4}{2100} + j^3 \frac{h^4}{30} \right) z^3 - \left[ j^2 \frac{h^5}{3} + j^3 \left( \frac{l^3 h^2}{8} - \frac{h^4 l}{20} \right) \right] z^2 \right\} . \end{aligned} \tag{46}$$

Die hyperkomplexe Spannung errechnet sich zu

$$\begin{aligned} (\sigma) = \frac{d^2 \Phi}{dz^2} = \frac{p}{h^3 l^2} & \left\{ \frac{j}{10} z^5 - \frac{j l}{4} z^4 - \left( j \frac{8 h^2}{5} + j^3 h^2 \right) z^3 + \left[ 2 h^3 + j \left( \frac{l^3}{4} + \frac{12 h^2 l}{5} \right) + j^3 \frac{3 h^2 l}{2} \right] z^2 \right. \\ & \left. - \left( 2 h^3 l + j \frac{227 h^4}{250} + j^3 \frac{h^4}{5} \right) z - j^2 \frac{2 h^5}{3} + j^3 \left( \frac{l^3 h^2}{4} - \frac{h^4 l}{10} \right) \right\} . \end{aligned} \tag{47}$$

Durch Zerlegen in ihre vier Elemente erhält man

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{p}{h^3 l^2} \left[ \frac{-3}{10} y^5 + 2 x^2 y^3 - 2 l x y^3 - \frac{h^2}{5} y^3 - 2 h^3 y^2 - \frac{1}{2} x^4 y + l x^3 y - \frac{6 h^2}{5} x^2 y \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{l^3}{2} - \frac{6 l h^2}{5} \right) x y + \frac{87 h^4}{350} y + \frac{2 h^5}{3} \right] , \\ \sigma_y &= \frac{p}{h^3 l^2} \left[ \frac{1}{5} y^5 - x^2 y^3 + l x y^3 - \frac{2 h^2}{5} y^3 + 3 h^2 x^2 y \right. \\ &\quad \left. - 3 h^2 l x y + \frac{h^4}{5} y + 2 h^3 x^2 - 2 h^3 l x \right] , \\ \tau &= \frac{-p}{h^3 l^2} \left[ x y^4 - \frac{l}{2} y^4 - x^3 y^2 + \frac{3 l}{2} x^2 y^2 - \frac{6 h^2}{5} x y^2 - \left( \frac{l^3}{4} - \frac{3 l h^2}{5} \right) y^2 + h^2 x^3 \right. \\ &\quad \left. - \frac{3 h^2 l}{2} x^2 + \frac{h^4}{5} x + \left( \frac{l^3 h^2}{4} - \frac{h^4 l}{10} \right) \right] . \end{aligned} \right\} \tag{48}$$

Der Vollständigkeit halber geben wir noch die Airysche Spannungsfunktion an:

$$\begin{aligned} F = \frac{p}{h^3 l^2} & \left[ -\frac{1}{140} y^7 + \frac{1}{10} x^2 y^5 - \frac{l}{10} x y^5 - \frac{h^2}{100} y^5 - \frac{h^3}{6} y^4 - \frac{1}{12} x^4 y^3 + \frac{l}{6} x^3 y^3 - \frac{h^2}{5} x^2 y^3 \right. \\ & - \left( \frac{l^3}{12} - \frac{l h^2}{5} \right) x y^3 + \frac{29 h^4}{700} y^3 + \frac{h^5}{3} y^2 + \frac{h^2}{4} x^4 y - \frac{h^2 l}{2} x^3 y + \frac{h^4}{10} x^2 y \\ & \left. + \left( \frac{l^3 h^2}{4} - \frac{h^4 l}{10} \right) x y + \frac{h^3}{6} x^4 - \frac{h^3 l}{3} x^3 \right] . \end{aligned} \tag{49}$$

**5. Flamants Lösung für die unendliche Halbebene, deren Rand durch eine Einzelkraft belastet ist.**  
Zu Anfang müssen wir darlegen, was wir unter einer Einzelkraft verstehen wollen, da in unseren bisherigen Betrachtungen über die Randbedingungen dieser Begriff noch nicht aufgetreten ist. Dabei knüpfen wir bei (15) an und stellen uns zum Beispiel eine konstante Normalbelastung der Intensität  $p$  längs der Strecke von  $-\varepsilon$  bis  $+\varepsilon$  vor. Zur Einzellast kommen wir durch den Grenzübergang  $p_y \rightarrow \infty$  und  $\varepsilon \rightarrow 0$  derart, daß  $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p_y dx$  endlich bleibt und gleich dem Betrag der Einzelkraft  $P$  wird. In den Randbedingungen (19) und (21) stellen dann  $P_x$  und  $P_y$  keine Abkürzungen für Funktionen längs des Randes mehr dar, sondern sind direkt die Beträge der Komponenten der Einzelkraft, wenn wir die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  aus (15) gleich Null gesetzt haben.

Nach dieser Vorbemerkung können wir die Randbedingungen formulieren:

$$\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{-\infty}^x = \dots - j^3 0, \quad [\Phi]_{-\infty}^x = 0 + j \dots \quad (-\infty < x < 0), \quad (50)$$

$$\left(\frac{d\Phi}{dz}\right)_{-\infty}^x = \dots - j^3 Q, \quad [\Phi]_{-\infty}^x = -Px + j \dots \quad (0 \leq x < \infty). \quad (51)$$

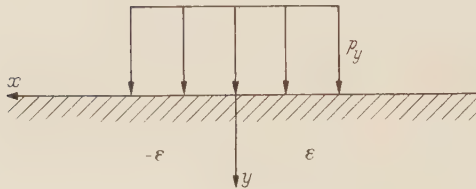


Abb. 3. Grenzübergang zur Einzellast.

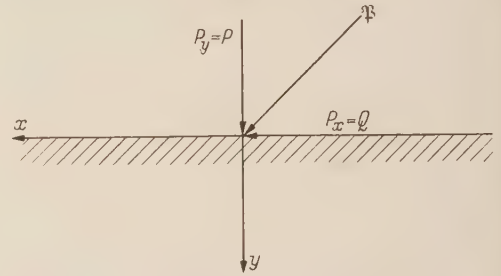


Abb. 4. Die unendliche Halbebene mit Einzellast.

Zum Aufsuchen der Lösung gehen wir zweckmäßig von der zweiten Ableitung der Funktion  $\Phi$ , also der hyperkomplexen Spannung ( $\sigma$ ) aus. Zuzufolge des bei der Definition der Einzellast gemachten Grenzüberganges wissen wir, daß die Spannungen im Nullpunkt unendlich werden. Wir denken und ( $\sigma$ ) in eine *Laurent-Reihe* um den Nullpunkt entwickelt:

$$(\sigma) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}. \quad (52)$$

Da die Spannungen im Unendlichen verschwinden müssen, fallen alle Glieder mit positivem Exponenten fort und es bleibt

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = (\sigma) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{-\nu} \frac{1}{z^{\nu}}. \quad (53)$$

Die Reihe konvergiert außerhalb von  $z = 0$  gleichmäßig, wir dürfen also gliedweise integrieren und erhalten

$$\frac{d\Phi}{dz} = a_{-1} \ln z + \sum_{\nu=2}^{\infty} a_{-\nu} \frac{1}{(1-\nu) z^{\nu-1}} + C, \quad (54)$$

$$\Phi = a_{-1} z (\ln z - 1) + a_{-2} \ln z + \sum_{\nu=3}^{\infty} a_{-\nu} \frac{1}{(1-\nu)(2-\nu) z^{\nu-2}} + Cz + D. \quad (55)$$

Die Lösung folgt nun unmittelbar aus der Tatsache, daß die Spannungsfunktion  $\Phi$  am Rande stetig ist. Sie muß daher im Nullpunkt existieren und nimmt dort den Wert Null an. Demnach müssen alle  $a_{-\nu}$  mit  $\nu \geq 2$  und die Konstante  $D$  verschwinden. Hier sehen wir die Bedeutung der hyperkomplexen Spannungsfunktion für die Behandlung von Aufgaben mit belasteten Rändern. Wir erhalten somit

$$\Phi = a_{-1} z (\ln z - 1) + Cz, \quad \frac{d\Phi}{dz} = a_{-1} \ln z + C. \quad (56)$$

Die Konstanten bestimmt man aus den Randbedingungen. Man beachte, daß

$$[\ln z]_{z=x} = \left[ \ln \alpha + \omega \beta \frac{1}{\alpha} \right]_{\substack{\alpha=x \\ \beta=0}},$$

$$[\ln \alpha]_{\alpha=x} = \ln x, \quad [\ln \alpha]_{\alpha=-x} = \ln |x| + i\pi.$$

Dabei ist der Verzweigungsschnitt des Logarithmus längs der positiv reellen Achse geführt. Weiter können wir bei

$$C = C_1 + j C_2 + j^2 C_3 + j^3 C_4$$

die Konstanten  $C_2 = C_3 = 0$  setzen [siehe (44)]. Wir erhalten

$$a_{-1} = \frac{2}{\pi} (-j P + j^2 Q), \quad C = - (P + j^3 Q).$$

Die in  $z$  linearen Glieder, welche durch das Nullsetzen der Konstanten auf der lastfreien, negativ reellen Achse hereinkommen, können, da sie für die Spannungen ohne Belang sind, auch wieder weggelassen werden. Die hyperkomplexe Spannungsfunktion lautet dann

$$\Phi = \frac{2}{\pi} (-j P + j^2 Q) z \ln z \quad (57)$$

und damit die hyperkomplexe Spannung

$$(\sigma) = \frac{d^2\Phi}{dz^2} = \frac{2}{\pi} (-j P + j^2 Q) \frac{1}{z}. \quad (58)$$



Durch Anwendung der Zerlegungsformel erhält man leicht die bekannte Airysche Spannungsfunktion und die reellen Spannungskomponenten

$$F = \left( \frac{P}{\pi} x - \frac{Q}{\pi} y \right) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x}. \quad (59)$$

Während sonst in der Literatur<sup>1</sup> üblicherweise die Airysche Spannungsfunktion als gegeben an die Spitze gestellt wird und daraus die Spannungen hergeleitet werden, wird hier ein einfacher Weg aufgezeigt, wie man diese selbst findet. Dabei wird lediglich von der Tatsache Gebrauch gemacht, daß die hyperkomplexe Spannungsfunktion eine im ganzen Bereich reguläre Funktion ist.

**6. Einführung krummliniger Koordinaten in die Spannungsfunktion und Zerlegung des Spannungstensors in Hauptspannungen und krummlinige Komponenten.** Bei den bisherigen Betrachtungen über die hyperkomplexe Spannungsfunktion  $\Phi(z)$  war stets  $z = x + jy$ , so daß auch die Airysche Funktion  $F$  als Funktion von  $x, y$  erschien. Es ist aber auch erwünscht,  $F$  als Funktion krummliniger Koordinaten  $\xi, \eta$  zu betrachten. Man könnte natürlich einfach

$$x = g(\xi, \eta), \quad y = h(\xi, \eta) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0$$

in  $F(x, y)$  einsetzen und hätte dann  $F(g(\xi, \eta), h(\xi, \eta)) \equiv F^*(\xi, \eta)$ .

Für den am meisten interessierenden Fall orthogonaler, isometrischer Koordinaten ermöglicht die hyperkomplexe Zerlegungsformel einen praktischeren Weg. Wir gehen zurück auf (26) und (27): Orthogonale isometrische Koordinaten werden durch Betrachtung der konformen Abbildung einer  $\gamma$ -Ebene mit  $\gamma = \xi + i\eta$  auf die  $\alpha$ -Ebene erhalten, bei der die Geraden  $\xi = \text{konst.}$  und  $\eta = \text{konst.}$  in der  $\alpha$ -Ebene die gewünschten orthogonalen Kurvenscharen ergeben:

$$\alpha = \varphi(\gamma), \quad x + iy = \varphi(\xi + i\eta) = u(\xi, \eta) + iv(\xi, \eta), \quad \beta = -\frac{iy}{2} = -\frac{iv}{2}. \quad (60)$$

Setzt man (60) in  $\Phi(z)$  ein, so erhält man

$$\Phi(z) = \Phi(\varphi(\gamma)) - \frac{\omega iv}{2} \Phi'(\varphi(\gamma)). \quad (61)$$

Schreibt man

$$\Phi(\varphi(\gamma)) \equiv \Psi(\gamma), \quad (62)$$

dann kommt

$$\Phi(z) = \Psi(\gamma) - \frac{\omega iv}{2} \frac{d\varphi}{d\gamma} = F(u(\xi, \eta), v(\xi, \eta)) + j \dots \quad (63)$$

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß zwischen der Einführung orthogonaler isometrischer Koordinaten durch  $\alpha = \varphi(\gamma)$  bei einem komplexen Potential und bei einem hyperkomplexen Bipotential ein wesentlicher Unterschied besteht. Betrachtet man nämlich  $\Phi(\alpha)$ , so kann man dafür schreiben

$$\Phi(\alpha) = \Phi(x + iy) = \Phi(\varphi(\gamma)) = \Psi(\gamma) = \Psi(\xi + i\eta);$$

das heißt, durch Einführung von  $\alpha = \varphi(\gamma)$  in die analytische Funktion  $\Phi(\alpha)$  entsteht wieder eine analytische Funktion  $\Psi(\gamma) = \Psi(\xi + i\eta)$ . Dagegen läßt sich die aus  $\Phi(z) = \Phi(x + jy)$  durch Einführung von  $\alpha = \varphi(\gamma)$  entstehende Funktion nicht als Funktion von  $\xi + j\eta$  schreiben; sie ist also keine im hyperkomplexen Sinne analytische Funktion von  $\xi, \eta$ .

Der hyperkomplexe Spannungstensor hat die Komponenten

$$(\sigma) = \frac{d^2\Phi}{dz^2} = \sigma_y + j b - j^2 \sigma_x + j^3 \tau_{xy}. \quad (13)$$

Wir betrachten im folgenden den Ausdruck  $(1 + \omega/2)(\sigma)$  und können ihn wie jede hyperkomplexe Zahl in zwei komplexe Zahlen und die Nebeneinheit  $\omega$  zerlegen:

$$\left(1 + \frac{\omega}{2}\right)(\sigma) = (\sigma_y + \sigma_x) + i(b - \tau_{xy}) + \omega \left( \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i \tau_{xy} \right). \quad (64)$$

Der Realteil der ersten komplexen Zahl ist die Spannungssumme, für die wir wegen der Invarianz der Tensorspur auch schreiben können

$$\sigma_y + \sigma_x = \sigma_1 + \sigma_2. \quad (65)$$

Die zweite, mit  $\omega$  verknüpfte, komplexe Zahl schreiben wir, wie folgt:

$$\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i \tau_{xy} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4 \tau_{xy}^2} e^{i \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2 \tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}}. \quad (66)$$

Der Betrag gibt gerade die Hauptschubspannung an:

$$\tau_H = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4 \tau_{xy}^2},$$

<sup>1</sup> Siehe Fußnote 1 von S. 132.



und der Winkel die Richtung der Hauptspannungen mit der  $x$ -Achse

$$\operatorname{tg} 2\varphi_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_y - \sigma_x}.$$

Wir können also zusammenfassen:

$$\left(1 + \frac{\omega}{2}\right)(\sigma) = (\sigma_1 + \sigma_2) + i \dots + \omega \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} e^{i 2\varphi_{1,2}}. \quad (65)$$

Die Transformationsgleichungen der Spannungen

$$\sigma_\xi = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} - \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\Theta + \tau_{xy} \sin 2\Theta,$$

$$\sigma_\eta = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\Theta - \tau_{xy} \sin 2\Theta,$$

$$\tau_{\xi\eta} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\Theta + \tau_{xy} \cos 2\Theta$$

lassen sich zusammenfassen zu

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_y + \sigma_x, \quad (68)$$

$$\frac{\sigma_\eta - \sigma_\xi}{2} + i\tau_{\xi\eta} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cos 2\Theta - \tau_{xy} \sin 2\Theta + i \left( \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\Theta + \tau_{xy} \cos 2\Theta \right)$$

$$= \left( \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy} \right) e^{2i\Theta}. \quad (69)$$

Es seien nun krummlinige isometrische Koordinaten wie in (60) gegeben, dann gilt

$$\varphi'(\gamma) = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = |\varphi'(\gamma)| \frac{\frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}} = |\varphi'(\gamma)| (\cos \Theta + i \sin \Theta).$$

Wir haben somit die Beziehung

$$e^{2i\Theta} = \frac{\varphi'(\gamma)^2}{|\varphi'(\gamma)|^2}. \quad (70)$$

Multipliziert man die Gleichung (64) mit (70), so erhält man

$$\left(1 + \frac{\omega}{2}\right)(\sigma) \frac{\varphi'(\gamma)^2}{|\varphi'(\gamma)|^2} = \dots + \omega \left( \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} + i\tau_{xy} \right) e^{2i\Theta} = \dots + \omega \left( \frac{\sigma_\eta - \sigma_\xi}{2} + i\tau_{\xi\eta} \right).$$

Zusammengefaßt gilt

$$(\sigma) = \sigma_\xi + \sigma_\eta + i \dots + \omega \dots \quad \left(1 + \frac{\omega}{2}\right) \frac{\varphi'(\gamma)^2}{|\varphi'(\gamma)|^2} (\sigma) = \dots + \omega \left( \frac{\sigma_\eta - \sigma_\xi}{2} + i\tau_{\xi\eta} \right). \quad (71)$$

Mit Hilfe von Gleichung (71) ist nun der Übergang auf krummlinige Tensorkomponenten leicht möglich, wobei noch beliebig ist, ob die krummlinigen Komponenten Funktionen von  $x, y$  oder nach Gleichung (63), die natürlich nicht nur für die hyperkomplexe Spannungsfunktion, sondern für jede hyperkomplexe Funktion gilt, Funktionen der krummlinigen Koordinaten  $\xi, \eta$  sind.

**7. Zusammenfassung.** Wir gehen von der Sobreroschen Theorie der Beschreibung des ebenen Spannungszustandes mittels hyperkomplexer Funktionen aus. Während Sobrero sich auf die Anwendungen beschränkt, bei denen Kräfte nur im Innern des Materials angreifen und die Ränder durchweg lastfrei sind, erweitern wir diese Theorie durch Einführung der hyperkomplexen Spannungsfunktion (12), (13) und behandeln damit auch belastete Ränder. Die hyperkomplexe Spannungsfunktion hebt die von den Belastungen herrührenden Unstetigkeiten am Rande auf und stellt somit die Gültigkeit des Cauchyschen Integralsatzes im ganzen Bereich wieder her. Ferner ist für das praktische Rechnen mit hyperkomplexen Funktionen die Zerlegungsformel (26), (27) und (28) von Bedeutung. Sie deckt den Zusammenhang der hyperkomplexen mit den komplexen Funktionen auf. In den Anwendungen wird gezeigt, daß man die üblichen Belastungsfälle des geraden Balkens mit Hilfe von Polynomen lösen kann: (32) bis (37). Dabei ist es möglich, weitere bis jetzt unbekannte Fälle in das aufgestellte Schema einzuordnen und zu lösen. In dem Falle des Balkens mit parabelförmiger Belastung ist die Behandlung bis zu Ende durchgeführt: (49). Für die unendliche Halbebene mit Einzellast wird eine Ableitung angegeben, welche nur die Stetigkeit der Spannungsfunktion und das Verschwinden der Spannungen im Unendlichen benutzt: (57). Die Zerlegungsformel für die hyperkomplexe Funktion ermöglicht in einfacher Weise die Einführung orthogonaler, isometrischer Koordinaten in die Spannungsfunktion (63) und die Zerlegung in krummlinige Tensorkomponenten: (71).

(Eingegangen am 21. Juli 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr. W. Engl, Karlsruhe, Germersheimer Str. 20.



Soeben erschien:

# Aerodynamik des Flugzeuges

Von Dr. phil. H. Schlichting, o. Professor an der Technischen Hochschule Braunschweig, Direktor der Aerodynamischen Versuchsanstalt Göttingen und Leiter des Institutes für Aerodynamik der Deutschen Forschungsanstalt für Luftfahrt Braunschweig

und Dr.-Ing. E. Truckenbrodt, o. Professor für Technische Mechanik und Strömungsmechanik an der Technischen Hochschule München

Erster Band: **Grundlagen aus der Strömungsmechanik**

## Aerodynamik des Tragflügels (Teil I)

Mit 260 Abbildungen. XV, 455 Seiten Gr.-8°. 1959. Ganzleinen DM 52,50

Inhaltsübersicht: Teil A: Grundlagen aus der Strömungsmechanik: Einführung und physikalische Eigenschaften der Atmosphäre: Aufgaben der Flugzeug-Aerodynamik. Physikalische Eigenschaften der Luft. Ähnlichkeitsgesetze der Strömungen. Literatur. — Inkompressible reibungslose Strömungen. (Hydrodynamik): Kinematik der Flüssigkeitsbewegungen. Eindimensionale Strömungen (Stromfadentheorie). Zwei- und dreidimensionale Strömungen. Wirbelbewegung. Berechnung ebener Potentialströmungen mit Hilfe komplexer Funktionen. Der Impulssatz. Literatur. — Kompressible, reibungslose Strömungen (Gasdynamik): Grundbegriffe. Eindimensionale Strömungen (Stromfadentheorie). Zweidimensionale Strömungen. Ebene Unterschallströmungen. Ebene Überschallströmungen. Ebene transsonische Strömungen. Literatur. — Strömungen mit Reibung (Grenzschicht-Theorie): Grundzüge der Strömung mit Reibung. Grundzüge der Grenzschicht-Theorie. Die Bewegungsgleichungen der zähen Flüssigkeit (Navier-Stokessche Gleichungen). Die Prandtlischen Grenzschichtgleichungen. Grenzschichtbeeinflussung. Einiges über turbulente Strömungen. Der turbulente Reibungswiderstand der längsangeströmten ebenen Platte. Berechnung der Grenzschicht mit Druckabfall und Druckanstieg. Grenzschichten bei kompressibler Strömung. Der Umschlag laminarturbulent. Literatur. — Teil B: Aerodynamik des Tragflügels: Einführung in die Aerodynamik des Tragflügels: Geometrie des Tragflügels. Kräfte und Momente am Tragflügel. Zusammenhang zwischen den Luftkräften und den Bewegungsformen des Tragflügels. Literatur. — Der Tragflügel unendlicher Spannweite bei inkompressibler Strömung (Profiltheorie): Grundlagen der Theorie des Auftriebes. Profiltheorie nach der konformen Abbildung. Profiltheorie nach der Singularitätenmethode. Einfluß der Reibung auf die Profileigenschaften. — Literatur. — Namenverzeichnis. — Sachverzeichnis.

In Vorbereitung:

Zweiter Band: **Aerodynamik des Tragflügels (Teil II)**

## Aerodynamik des Rumpfes und der Leitwerke

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG



# NUMERISCHE MATHEMATIK

UNTER MITWIRKUNG VON

F. L. BAUER, MAINZ · L. BIERMANN, MÜNCHEN · L. COLLATZ, HAMBURG  
G. DARMOIS, PARIS · G. E. FORSYTHE, PALO ALTO · A. GHIZZETTI, ROM  
W. GIVENS, DETROIT · R. INZINGER, WIEN · N. J. LEHMANN, DRESDEN  
E. J. NYSTRÖM, HELSINKI · H. PILOTY, MÜNCHEN · R. D. RICHTMYER, NEW YORK  
A. VAN WIJNGAARDEN, AMSTERDAM · J. H. WILKINSON, TEDDINGTON

HERAUSGEGEBEN VON

R. SAUER · E. STIEFEL · J. TODD · A. WALTHER  
MÜNCHEN                      ZÜRICH                      PASADENA                      DARMSTADT

Die Zeitschrift „Numerische Mathematik“ veröffentlicht auf breiter internationaler Grundlage Arbeiten, die sich mit allgemeinen Problemen des digitalen Rechnens, mit der Diskussion bestehender und der Entwicklung neuer numerischer Verfahren beschäftigen. Dabei werden die numerischen und programmierungstechnischen Gesichtspunkte des Einsatzes von Rechenautomaten im Vordergrund stehen. Aufsätze aus dem Gebiet der Informationstheorie werden jedoch ebenfalls Aufnahme finden.

Die Zeitschrift erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

## 1. Band, 1. Heft

Mit 12 Abbildungen. 60 Seiten Gr.-8°. 1959. DM 16,80

Inhaltsübersicht des ersten Heftes: Über diskrete und lineare Tschebyscheff-Approximationen. Von Professor Dr. E. STIEFEL, Zürich. — On certain methods for expanding the characteristic polynomial. By Dr. A. S. HOUSEHOLDER, Oak Ridge/Tenn. (USA), and Professor Dr. F. L. BAUER, Mainz. — Orthogonal polynomials on several variables. By Dr. M. WEISFELD, San Francisco/Cal. (USA). — Report on the Algorithmic Language ALGOL. By the ACM Committee on Programming Languages and the GAMM Committee on Programming. Edited by Professor Dr. A. J. PERLIS, Pittsburgh/Pa. (USA), and Professor Dr. K. SAMELSON, Mainz.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG